

Einstein-de-Haas-Effekt

Michael Prim, Tobias Volkenandt
Gruppe 37

11. Juni 2007

Inhaltsverzeichnis

1 Ziel des Versuchs	2
2 Theoretische Grundlagen	2
2.1 Grundlagen des Magnetismus	2
2.1.1 Diamagnetismus	2
2.1.2 Ferromagnetismus	2
2.1.3 Paramagnetismus	2
2.2 Der g-Faktor	3
2.2.1 Torsionsschwingungen	3
2.2.2 Magnetisierung	4
2.2.3 Ballistische Messung	4
2.2.4 Numerische Integration	5
3 Experimenteller Aufbau und Versuchsdurchführung	6
3.1 Aufgabe a - Resonanzfrequenz und Abklingzeit	6
3.2 Aufgabe b - Resonanzamplitude	7
3.3 Aufgabe c - Magnetisierung mit Galvanometer	7
3.4 Aufgabe d - Magnetisierung mit Oszilloskop	7
4 Versuchsauswertung	8
4.1 Aufgabe a - Resonanzfrequenz und Abklingzeit	8
4.2 Aufgabe b - Resonanzamplitude	10
4.3 Aufgabe c - Magnetisierung mit Galvanometer	10
4.4 Aufgabe d - Magnetisierung mit Oszilloskop	13
5 Schlussbemerkung	18

1 Ziel des Versuchs

Bei diesem Versuch geht es darum, das historische Experiment von A. Einstein und W. J. de Haas nachzuvollziehen und selbst einmal den g-Faktor von Elektronen zu messen. Die ursprüngliche Intention war dabei, einen Beweis dafür zu erbringen, dass der Ferromagnetismus durch Spin und Bahndrehimpuls der Elektronen im Festkörper verursacht wird.

2 Theoretische Grundlagen

Der g-Faktor von Elektronen ist nicht direkt messbar. Im Experiment werden daher seine Auswirkungen auf die makroskopischen Größen Magnetisierung und Drehmoment gemessen. Aus diesen lässt sich der g-Faktor dann berechnen.

2.1 Grundlagen des Magnetismus

Im Folgenden werden die verschiedenen Arten des Magnetismus erläutert.

2.1.1 Diamagnetismus

Der Diamagnetismus tritt in Festkörpern auf, die keine permanenten magnetischen Dipole besitzen. Allerdings können durch ein äußeres Magnetfeld magnetische Dipole induziert werden. Das inhomogene Magnetfeld erzeugt ein elektrisches Wirbelfeld, das die Elektronen im Festkörper entweder beschleunigen oder abbremsen kann. Dadurch wird der Bahndrehimpuls der Elektronen erhöht bzw. verringert. In beiden Fällen ist dieser Effekt dem äußeren Feld entgegengerichtet. Es stellt sich eine entgegen gesetzte Magnetisierung ein, die das äußere Feld abschwächt. Supraleiter sind perfekte Diamagneten, bei denen eine völlige Kompensation des äußeren Feldes erfolgt. Prinzipiell sind alle Stoffe Diamagneten, wobei der Effekt gegenüber anderen magnetischen Eigenschaften verschwindet.

2.1.2 Ferromagnetismus

Besitzt ein Festkörper permanente magnetische Dipole, so beeinflussen sich diese über die Coulomb-Wechselwirkung gegenseitig. Es bilden sich Domänen mit parallel ausgerichteten Bahndrehimpulsen aus, sog. Weiß'sche Bezirke. Legt man nun ein äußeres Feld an, richten sich diese Bezirke nach und nach parallel zu diesem aus. Die dadurch entstehende Magnetisierung verstärkt dann das äußere Feld. Sind alle Bezirke ausgerichtet, kann die Magnetisierung nicht weiter steigen und bleibt konstant. Wird das äußere Feld abgeschaltet, so bleibt die Ausrichtung zunächst erhalten (Hysterese), was zu einer sog. Restmagnetisierung (Remanenz) führt. Um diese zu kompensieren, muss ein entgegengesetztes Feld angelegt werden. Die Feldstärke, die dann nötig ist um die Magnetisierung komplett aufzuheben, heißt Koerzitivkraft.

Die thermische Energie wirkt der Ausbildung von Weiß'schen Bezirken entgegen. Steigt die Temperatur über einen kritischen Wert, die sog. Curie-Temperatur, so überwiegt die thermische Energie die Coulomb-Wechselwirkung und die Ordnung geht verloren. Die Stoffe werden dann paramagnetisch.

2.1.3 Paramagnetismus

In einem Paramagneten sind ebenfalls permanente magnetische Dipole vorhanden, die sich bei Anlegen eines äußeren Feldes entlang diesem ausrichten. Die dadurch entstehende Magnetisie-

rung verstärkt das äußere Feld. Paramagnetismus tritt häufig erst bei höheren Temperaturen auf, weswegen eher Gase und Flüssigkeiten zu den Paramagneten zählen.

2.2 Der g-Faktor

Ein Elektron, das um einen Atomkern kreist, besitzt einen Bahndrehimpuls l und ein magnetisches Moment μ . In Einheiten des Bohr'schen Magnetons μ_B ergibt sich hierbei die Beziehung

$$\mu = -g l \mu_B \frac{1}{\hbar}$$

welche sich aus der Betrachtung des Elektrons als einwindige Leiterschleife gewinnen lässt. Ganz analog kann man die Herleitung für den Eigendrehimpuls (Spin) s des Elektrons führen, erhält jedoch dann aus quantenmechanischen Gründen das doppelte magnetische Moment. Kombiniert man beide zum Gesamtdrehimpuls j und gesamtem magnetischem Moment μ , so bezeichnet man deren Verhältnis als gyromagnetisches Verhältnis:

$$\gamma = \frac{\mu}{j} = -g \frac{e}{2m} = -g \mu_B \frac{1}{\hbar}$$

Wobei sich g aus den Drehimpulsquantenzahlen ergibt:

$$g = 1 + \frac{j(j+1) + s(s+1) - l(l+1)}{2j(j+1)}$$

Um den g-Faktor experimentell zu bestimmen, müssen also das magnetische Moment μ und der Drehimpuls j gemessen werden. Wie in der Vorbereitungshilfe gezeigt wird, lassen diese sich im konkreten Fall des Einstein-de-Haas-Experiments auf die zu messenden Größen zeitliche Änderung der Magnetisierung \dot{M} und Drehmoment D zurückführen. Für den g-Faktor ergibt sich dann die Gleichung:

$$g = \frac{2m}{e} V \frac{\dot{M}_{max}}{D_{max}}$$

Wobei V das Volumen des Stabes ist und die beiden Größen zu Zeitpunkten betrachtet werden, an denen ihre Amplituden am größten sind.

2.2.1 Torsionsschwingungen

Zur Bestimmung des maximalen Drehmomentes D_{max} betrachtet man die Torsionsschwingung einer am Glasfaden aufgehängten Probe. Diese hängt in einer wechselstromdurchflossenen Spule und wird durch deren Magnetfeld periodisch magnetisiert, was zu einer Drehimpulsänderung der einzelnen Elektronen führt. Diese muss jedoch aufgrund der Drehimpulserhaltung durch einen makroskopischen Drehimpuls der Probe kompensiert werden. Die so entstehende Torsionsschwingung wird durch folgende Differentialgleichung beschrieben:

$$\ddot{\alpha} + 2\beta\dot{\alpha} + \omega_0^2\alpha = \frac{D_{max}}{\Theta} \cos(\omega_{err}t)$$

Wobei Θ das Trägheitsmoment der Probe, β die Dämpfungskonstante und ω_{err} die Erregerfrequenz sind. Im für uns interessanten Resonanzfall ω_{res} mit der Amplitude α_{res} gilt, wie in der Vorbereitungshilfe ausführlich hergeleitet wird, für das maximale Drehmoment D_{max} :

$$D_{max} = 2\beta\omega_{res}\alpha_{res}\Theta$$

Im Experiment müssen die Resonanzfrequenz ω_{res} und die Resonanzamplitude α_{res} gemessen werden. Außerdem wird die Abklingzeit $\tau = \frac{1}{\beta}$ aus der Dämpfung der Amplitude bestimmt:

$$\tau = \frac{t}{\ln \frac{\alpha_0}{\alpha(t)}}$$

Das Trägheitsmoment der Probe ergibt sich für einen Stab zu: $\Theta = \frac{1}{2}mr^2$.

2.2.2 Magnetisierung

In einem periodischen äußeren Feld ändert sich die Magnetisierung ebenfalls periodisch. Allerdings bleibt sie konstant, wenn bereits alle magnetischen Dipole ausgerichtet sind. In dem Moment, in welchem die magnetischen Dipole umklappen kommt es zu einer raschen Änderung der Magnetisierung. Die zeitliche Änderung der Magnetisierung hat dann die Form von Delta-Peaks. Wird die zeitliche Änderung der Magnetisierung in eine Fourierreihe entwickelt, so lässt sich die maximale Änderung der Magnetisierung durch den ersten Fourierkoeffizienten abschätzen:

$$\dot{M}_{max} \approx \left(\frac{dM}{dt} \right)_1 = \frac{2}{T} \int_0^T \frac{dM}{dt} \sin(\omega_0 t) dt \quad (1)$$

Im Experiment kann $\left(\frac{dM}{dt} \right)_1$ durch ballistische Messung mit Hilfe eines Galvanometers oder durch numerische Integration mit Hilfe eines Oszilloskops bestimmt werden.

2.2.3 Ballistische Messung

Wenn man davon ausgeht, dass die Delta-Peaks schmal sind, verglichen mit der Periodendauer, kann das Integral (1) für den ersten Fourierkoeffizient einfach ausgeführt werden. Es ergibt sich:

$$\left(\frac{dM}{dt} \right)_1 = -\frac{8M_S}{T}$$

Wobei M_S die Sättigungsmagnetisierung ist. Deren Wert kann über die an einer Induktionsspule gemessene Spannung berechnet werden. Auf diese Induktionsspule wirken dann das Magnetfeld der äußeren Erzeugerspule sowie das durch die Magnetisierung des Stabes:

$$-U_{ind} = \mu_0 N_2 F_{Sp} \frac{dH}{dt} + \mu_0 N_2 F_{St} \frac{dM}{dt} \quad (2)$$

Integriert man diese Gleichung, so erhält man als Grenze die Sättigungsmagnetisierung M_S . Formt man nach dieser um und setzt sie oben ein, so ergibt sich:

$$\left(\frac{dM}{dt} \right)_1 = \frac{-4}{T \mu_0 N_2 F_{St}} \int_0^{\frac{T}{2}} U_{ind} dt + \frac{8N_1 I_0}{T l} \frac{F_{Sp}}{F_{St}}$$

Wobei F_{Sp} und F_{St} die Querschnittsflächen von Induktionsspule bzw. Stab sind. I_0 ist der magnetfelderzeugende Strom durch die äußere Spule der Länge l . N_1 und N_2 sind die Windungszahlen von äußerer und innerer Spule.

Das Integral über die Induktionsspannung wird mit Hilfe eines ballistischen Galvanometers gemessen. Ein Galvanometer beruht allgemein auf der Messung der Auslenkung A_0 eines stromdurchflossenen Zeigers im Magnetfeld. Das ballistische Galvanometer ist so ausgelegt, dass es zu träge ist, um wirklich den zeitlichen Verlauf des Stromes zu erfassen. Vielmehr misst es die Anzahl der ankommenden Ladungen. Man kann also sagen, es integriert den Strom über die Zeit.

$$Q = \int I dt = \frac{1}{R} \int U_{ind} dt$$

Allerdings integriert das Galvanometer aufgrund seiner Auslegung nur von 0 bis $\frac{T}{4}$, weswegen der Messwert später doppelt zu nehmen ist. Da die Ladung proportional zur Auslenkung ist, ergibt sich letztendlich für den kompletten Stromkreis:

$$Q = k A_0 = \frac{1}{R_{ges}} \int_0^{\frac{T}{4}} U_{ind} dt$$

Wobei der Proportionalitätsfaktor k vorher durch Eichmessungen mit genau bekannten Ladungen Q und Spannungen U , gemäß $Q = CU$, zu ermitteln ist. Mit R_{ges} ist der Gesamtwiderstand der Galvanometer-Schaltung gemeint. Betrachtet man diese korrekt als Parallelschaltung so ergibt sich entgegen der Vorbereitungshilfe:

$$\frac{1}{R_{ges}} = \frac{1}{R_{Spule}} + \frac{1}{R_{Ohm} + R_{Galv}} \quad \rightarrow \quad R_{ges} = 36,857\Omega$$

2.2.4 Numerische Integration

Geht man nicht von der Bedingung schmaler Peaks aus, muss das Integral umfassender gelöst werden. In Gleichung (1) setzt man dann den nach $\frac{dM}{dt}$ umgeformten Ausdruck (2) für die Induktionsspannung ein. Nach weiteren Umformungen und einer Integration ergibt sich:

$$\left(\frac{dM}{dt}\right)_1 = -\frac{2K}{T\mu_0 N_2 F_{St}} \int_0^T U_{ind} \sin(\omega_{res} t) dt + \frac{N_1 I_0 \omega_{res} F_{Sp}}{F_{St} l}$$

Um das Integral über die Induktionsspannung zu berechnen, wird bei der numerischen Integration das induzierte Spannungssignal auf einem Oszilloskop dargestellt. Die Messkurve kann dann mittels der Trapezregel numerisch integriert werden. Dazu werden die Messwerte mit Hilfe einer PC-Software digitalisiert und abgespeichert. Die Breite der Integrationsrechtecke ergibt sich dann aus Abtastauflösung. Für ein mit der Trapezregel genähertes Integral über eine Funktion $f(x)$ mit N Messwerten gilt:

$$\int_{x_1}^{x_N} f(x) dx \approx \sum_{i=2}^n (x_i - x_{i-1}) \frac{y_i + y_{i-1}}{2}$$

Da die Auflösung des Oszilloskops jedoch nicht groß genug ist, muss der so erhaltene Wert noch mit einem Eichfaktor K multipliziert werden. Dieser ergibt sich aus der Galvanometer-Messung. Es gilt:

$$K = \frac{4 \int_0^{\frac{T}{4}} U_{ind} dt \text{ via Galvanometer}}{\int_0^T U_{ind} dt \text{ via Oszilloskop}}$$

3 Experimenteller Aufbau und Versuchsdurchführung

Um den g-Faktor zu messen wird im Experiment ein ferromagnetischer Stab an einem Torsionsfaden aus Glas so aufgehängt, dass er innerhalb einer Spule Drehschwingungen ausführen kann. Über einen Sinusgenerator kann ein Wechselstrom an die Spule angelegt werden. Auf diese Weise wird der Stab einem periodischen Magnetfeld ausgesetzt und ändert seine Magnetisierung. Diese führt zu einer Drehimpulsänderung, welche den Stab zu Torsionsschwingungen anregt. Über die Ablenkung eines Laserstrahls, der auf einen am Stab befestigten Spiegel gerichtet ist, können diese Schwingungen sichtbar gemacht werden. An einem Schirm mit Millimeterskala lässt sich die Auslenkung messen.

Da es, wie in der Vorbereitung gezeigt, zur Messung des g-Faktors notwendig ist, die Magnetisierung durch das Magnetfeld zu kennen, befindet sich innerhalb der Feldspule eine weitere Spule. Die Induktionsspannung, die vom Magnetfeld in dieser in Spule erzeugt wird, kann gemessen werden und ermöglicht eine Bestimmung der Magnetisierung. Zur Messung kann entweder ein Galvanometer oder ein Oszilloskop verwendet werden.

Der ganze Aufbau aus Feldspule, Induktionsspule und Stab befindet sich in der Mitte eines Helmholtzspulenpaares. Dieses ist so ausgerichtet, dass es bei eingeschaltetem Strom genau die horizontale Komponente des Erdmagnetfeldes kompensiert. So werden genauere Messungen ohne erdmagnetische Störeinflüsse möglich.

3.1 Aufgabe a - Resonanzfrequenz und Abklingzeit

Der erste Versuch dient dazu, die mechanischen Eigenschaften des System kennen zu lernen und zu messen. Als erstes soll dazu die Resonanzkurve aufgenommen werden. Bei abgeschaltetem Helmholtzspulenpaar variierten wir daher die Frequenz des Feldstromes und maßen die maximale Amplitude der angeregten Torsionsschwingung. Wir stellten einen Effektivstrom von $I_{eff} = 0,6A$ ein. Die Frequenz wurde am Sinusgenerator über das Einstellen der Periodendauer festgelegt. Um einen groben Überblick über die Resonanzkurve zu erhalten begannen wir zuerst bei $T = 40ms$ und erhöhten die Periodendauer bis $T = 80ms$ in Schritten von $5ms$. Danach nahmen wir zur genaueren Vermessung des Resonanzmaximums weitere Werte zwischen $T = 42,5ms$ und $T = 43,0ms$ im Abstand von $0,02ms$ auf.

Anschließend sollte die Abklingzeit des Systems gemessen werden. Dazu regten wir das System mit dem selben Effektivstrom wie zuvor an, stellten jedoch fest die von uns ermittelte Resonanzfrequenz ein. Nachdem das System eingeschwungen war, schalteten wir den Spulenstrom im Moment der maximalen Auslenkung ab und starteten eine Zeitmessung. Diese stoppten wir genau dann, als die Amplitude auf $\frac{1}{e}$ ihres Maximalausschlags abgesunken war. Die so gemessene Zeit entspricht der Abklingdauer τ . Wir wiederholten die Messung mehrmals.

Unsere Messungen wurden jedoch durch die nicht vollständig exakte Justierung des Experiments erschwert. Der Tutor informierte uns darüber, dass es nicht möglich ist den Stab wirklich zentriert aufzuhängen. Dies hat zur Folge, dass nicht nur Torsionsschwingungen angeregt werden. Der Stab führt zusätzlich Kippschwingungen aus, die sich mit der erwünschten Drehschwingung zu einer Schwebung überlagern. Durch die Schwebung wird dann nicht nur eine Auslenkung des Laserstrahls in horizontaler Richtung, sondern zusätzlich in vertikaler Richtung beobachtet. Des weiteren ist die Horizontalauslenkung nicht konstant, sondern schwankt mit der Schwebung. Wir bemühten uns beim Ablesen der Schwingungsamplitude stets den Maximalwert zu betrachten und die Vertikalschwingung zu vernachlässigen. Trotzdem blieb die Messung schwierig und ist sicherlich ungenau.

3.2 Aufgabe b - Resonanzamplitude

Im zweiten Versuch sollte nun die Resonanzamplitude für die spätere g-Faktor-Berechnung gemessen werden. Um die Messgenauigkeit zu erhöhen sollte zusätzlich das Erdmagnetfeld kompensiert werden.

Die in der Aufgabenstellung verlangte Überprüfung der Justierung von Stab und Helmholtzspulenpaar brauchten wir nicht durchzuführen. Der Tutor versicherte uns, das System sei bestmöglich justiert und die Helmholtzspulen korrekt ausgerichtet. Daher begannen wir direkt mit der Messung der Kompensationsfeldstärke. Für die Feldspule stellten wir wieder einen Effektivstrom von $I_{eff} = 0,6A$ bei der Resonanzfrequenz ein. Den Strom durch die Helmholtzspulen variierten wir jedoch zwischen $0,2A$ und $0,6A$. Wir maßen jedes Mal die maximale Amplitude der Torsionsschwingung. Für den Fall, dass das Erdmagnetfeld genau kompensiert wird, erwarteten wir ein Minimum in der Amplitude.

Nachdem wir das Minimum ermittelt hatten und uns somit der für die Helmholtzspulen einzustellende Strom bekannt war, konnten wir die Messung der Resonanzamplitude durchführen. Wir führten dies für drei verschiedene Effektiv-Feldströme durch: $0,4A$, $0,5A$ und $0,6A$.

Auch diese Messung ist sicherlich ungenau, da das Ablesen durch die bei Versuch a erläuterten Umstände erschwert wurde.

3.3 Aufgabe c - Magnetisierung mit Galvanometer

Der dritte Versuch diente dazu die Magnetisierung zu messen. Dazu sollte, wie in der Vorbereitung erläutert, ein Galvanometer verwendet werden. Durch seine Trägheit misst es das Integral der ankommenden Spannung. Das Messsignal stammte von der Induktionsspule.

Bevor wir jedoch mit der Messung beginnen konnten, musste das Galvanometer geeicht werden. Der Aufbau entsprach dabei bereits dem später verwendeten Messaufbau. Allerdings stellten wir für die Eichung noch keinen Feldstrom ein. Die Induktionsspule wirkte daher nur als Ohm'scher Widerstand. Mit Hilfe einer kleinen Schaltung konnten wir einen Kondensator mit einer bestimmten Spannung aufladen. Dieser konnte dann über das Galvanometer entladen und ein Ausschlag beobachtet werden. Wir maßen den Galvanometeraussschlag für 10 feste Spannungen und können daraus eine Eichgerade ermitteln.

Anschließend konnte die Messung durchgeführt werden. An die Feldspulen wurde nun ein Gleichstrom angelegt. Diesen wählten wir analog zu den Scheitelwerten des zuvor eingestellten Wechselstromes. Wir rechneten daher die Effektivwerte in Scheitelwerte um: $I_0 = \sqrt{2} I_{eff}$. Nach Anlegen des Gleichstromes stellten wir das Galvanometer auf Null und schalteten dann den Feldstrom ab. Durch den Stromabfall wird in der Induktionsspule Spannung induziert, die uns einen Ausschlag auf dem Galvanometer lieferte. Wir hielten den ersten Maximalausschlag als Messwert fest. Diese Messung wiederholten wir für die drei Scheitelwerte, die den Effektivströmen aus Versuch b entsprachen.

3.4 Aufgabe d - Magnetisierung mit Oszilloskop

Im letzten Versuch sollte noch einmal die Magnetisierung gemessen werden. Allerdings dieses Mal mit Hilfe eines Oszilloskops. Wir stellten daher wieder einen Wechselstrom mit der Resonanzfrequenz durch die Feldspulen ein. Am Oszilloskop konnten wir dann den zeitlichen Verlauf der Induktionsspannung messen. Zugleich maßen wir jedoch auch ein sinusförmiges Signal mit der Frequenz des Feldstromes. Beide Signale konnten mit Hilfe eines Computers aufgenommen und abgespeichert werden. Später lässt sich dann die Magnetisierung errechnen, indem man die Signale

multipiziert und integriert. Wir führten die Messung für die drei bekannten Effektiv-Feldströme durch.

4 Versuchsauswertung

Im Rahmen der Versuchsauswertung wurden, soweit nichts anderes erwähnt, ROOT¹ und MATHEMATICA² zur Fehlerrechnung und grafischen Darstellung der Messergebnisse verwendet. Darüber hinaus wurden die gängigen Formeln für Stichprobenmittelwert, Stichprobenvarianz und Gauß'scher Fehlerfortpflanzung verwendet. Bei korrelierten Fehlern wird ggf. die Größtfehlerabschätzung anstelle der Gauß'schen Fehlerfortpflanzung verwendet, sofern nicht alle Elemente der Kovarianzmatrix bekannt sind. Darauf wird jedoch im Text explizit hingewiesen.

Von einer Wiedergabe der Messwerte im Protokoll sehen wir aus Gründen der Übersichtlichkeit ab. Sie finden sich im Messprotokoll und auf dem Praktikumsrechner.

4.1 Aufgabe a - Resonanzfrequenz und Abklingzeit

Unsere Messungen der Schwingungsamplitude bei verschiedenen Erregerfrequenzen ergaben die in Abbildung 1 gezeigte Resonanzkurve für das grobe Absuchen des Spektrums. Bei einer Periodendauer von $T = 75ms$ zeigt sich ein deutliches Resonanzmaximum. Auf Hinweis des Tutors beachteten wir dieses jedoch nicht, da es sich um die erste Oktave der Resonanz handelt. Die für uns interessante Resonanz liegt in dem Bereich um $T = 45ms$, wo unsere Kurve auch eine kleine Resonanzhöhung zeigt. Diesen Bereich untersuchten wir genauer und erhielten die in Abbildung 2 dargestellte feinere Resonanzkurve. Diese zeigt allerdings keinen glatten Anstieg zum Resonanzmaximum, sondern bricht immer wieder ein. Wir führen diesen Effekt jedoch auf die Schwierigkeiten beim Ablesen der Amplitude zurück und legen das trotzdem deutlich erkennbare Maximum fest. Die zugehörige Periodendauer lässt sich in eine Kreisfrequenz umrechnen und wurde in den folgenden Versuchsteilen als Resonanzfrequenz eingestellt. Wir erhielten als Messwert:

$$T_{res} = 42,72ms \quad \rightarrow \quad \omega_{res} = 147.078Hz$$

Durch das verfälschte Ablesen der Amplitude ist es uns nicht möglich einen systematischen Fehler für diese Messung anzugeben. Ganz abgesehen von seiner schwer festzulegenden Größe, hätte dieser lediglich zur Folge, dass im Plot vertikale Fehlerbalken auftauchen, die die Höhe des Resonanzmaximums unsicher erscheinen lassen. Auf die Lage der Resonanz hätte dies jedoch keinen Einfluss. Da uns jedoch genau die Lage, also die Resonanzfrequenz, interessiert lassen wir den Fehler außer acht.

Die Messung der Abklingzeit wurde von uns wie im vorherigen Kapitel beschrieben durchgeführt und lieferte uns die im Messprotokoll angegebenen Werte. Aus diesen konnten wir eine mittlere Abklingzeit ermitteln:

$$\tau = 12.914s \pm 1.589s$$

Hierbei ergibt sich der Fehler rein statistisch aus der Mittelung. Einen systematischen Fehler haben wir nicht angenommen, da er für alle Einzelmessungen gleich veranschlagt werden müsste und somit zu keiner Gewichtung beim Mittelungsprozess führt.

¹<http://root.cern.ch>

²<http://www.wolfram.com>

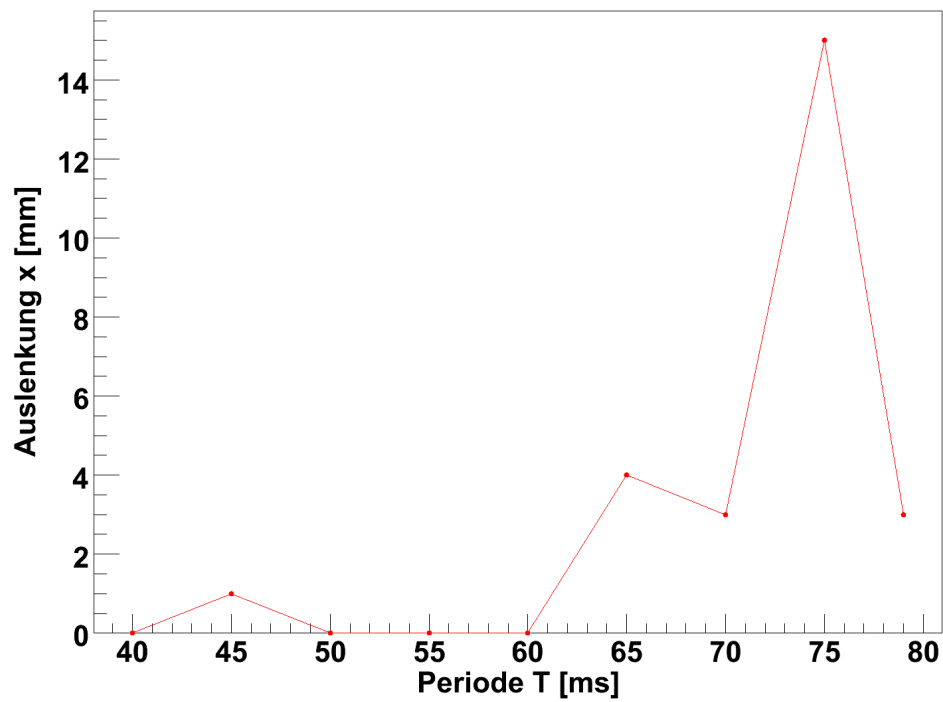


Abbildung 1: Resonanzkurve in groben Messschritten

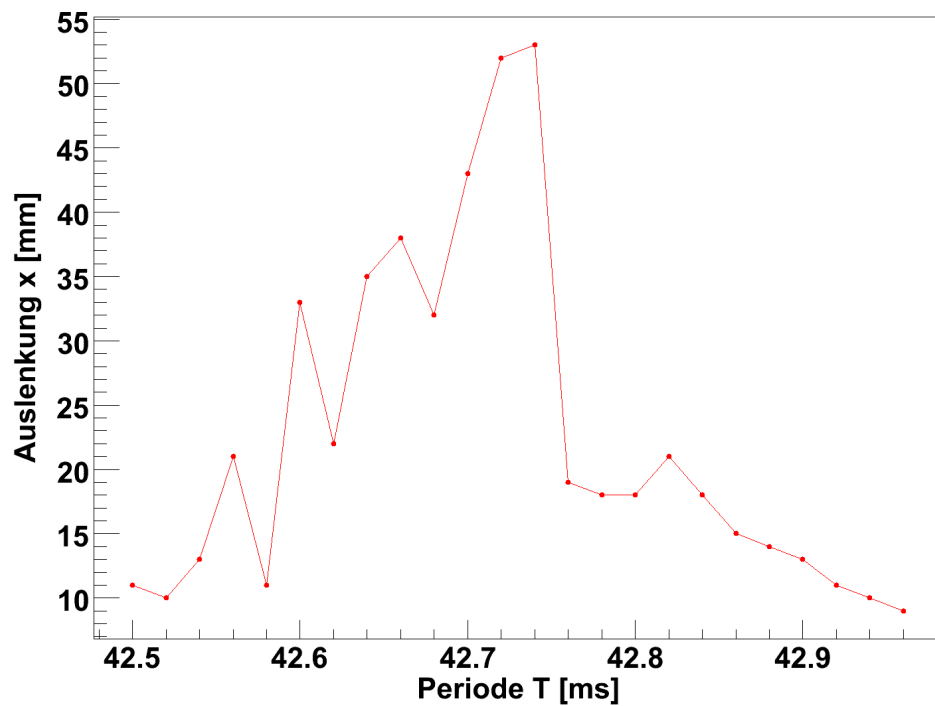


Abbildung 2: Resonanzkurve im Bereich der erwarteten Resonanz

4.2 Aufgabe b - Resonanzamplitude

Bei unseren Messungen zeigte sich, dass das Erdmagnetfeld bei einem Strom durch die Helmholtzspulen von $I_{HH} = 0,306A$ am besten kompensiert wurde. Die Auslenkungsamplitude wurde dann minimal. Also maßen wir bei dieser Kompensation die Resonanzamplitude und fanden für die angegebenen Effektivströme durch die Feldspule die in Tabelle 1 aufgelisteten Werte. Diese lassen sich bei bekanntem Schirmabstand in Auslenkwinkel α umrechnen. Es gilt: $\alpha = \arctan \frac{x}{L}$. In unserem Fall hatte der Schirm einen Abstand $L = 445cm \pm 1cm$.

Feldstrom I_{eff}	Auslenkung x_{res}	Auslenkwinkel α_{res}
0,6A	$4,2cm \pm 0,5cm$	$9,438mrad \pm 1,124mrad$
0,5A	$0,5cm \pm 0,1cm$	$1,123mrad \pm 0,225mrad$
0,4A	$1,0cm \pm 0,2cm$	$2,247mrad \pm 0,449mrad$

Tabelle 1: Messwerte von Auslenkung bzw. Auslenkwinkel für verschiedene Feldströme

Da wir mit diesen Werten für die Auslenkungswinkel später den g-Faktor berechnen wollen, erschien es uns sinnvoll an dieser Stelle einen systematischen Fehler anzugeben. Wir legten aufgrund der schwierigen Ableseverhältnisse für den ersten Messwert einen Fehler von 12% fest. Die kleineren Auslenkungen der beiden anderen Messwerte waren mit noch größeren relativen Schwankungen verbunden, so dass wir hier 20% veranschlagten.

4.3 Aufgabe c - Magnetisierung mit Galvanometer

Vor der eigentlichen Messung musste das Galvanometer geeicht werden. Wir führten diese Eichung durch und erhielten die in Abbildung 3 dargestellte Eichgerade. Aus der linearen Regression fanden wir Steigung m und Achsenabschnitt c der Geradengleichung mit deren Hilfe wir die späteren Messwerte umrechnen können:

$$m = 5.548 \frac{\mu C}{mm} \pm 0.020 \frac{\mu C}{mm}$$

$$c = -14.195 \mu C \pm 0.934 \mu C$$

Anschließend stellten wir die zu den Effektivströmen der vorherigen Messung gehörenden Scheitelströme I_0 ein und maßen den Ausschlag am Galvanometer bei Abschalten des Stromes. Wir erhielten die in Tabelle 2 dargestellten Ausschläge x . Diese lassen sich mit der Eichgeradengleichung in Ladungswerte Q umrechnen. Die Fehler für die Ladungswerte ergeben sich dabei durch Größtfehlerabschätzung, da die eingehenden Fehler von Geradensteigung und Achsenabschnitt korreliert sind.

Scheitelstrom I_0	Ausschlag x	Ladung Q
0,849A	$99mm \pm 2mm$	$535,060\mu C \pm 14,046\mu C$
0,707A	$94mm \pm 2mm$	$507,320\mu C \pm 13,944\mu C$
0,566A	$86mm \pm 2mm$	$462,936\mu C \pm 13,781\mu C$

Tabelle 2: Messwerte von Ausschlag bzw. Ladung des Galvanometers für verschiedene Scheitelströme

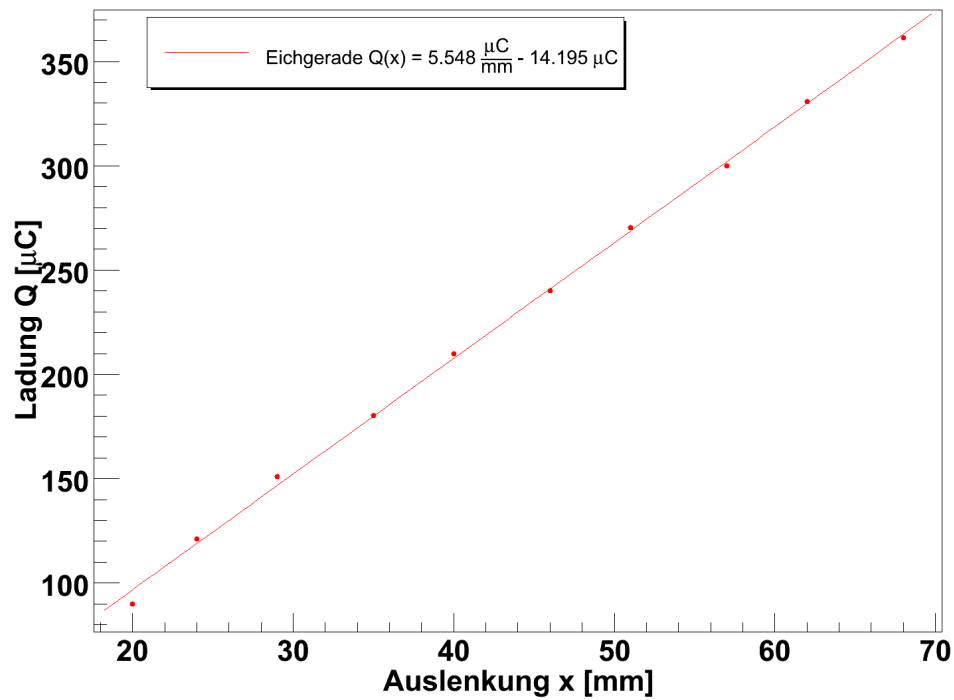


Abbildung 3: Eichgerade des Galvanometers

Wie in der Vorbereitung gezeigt wurde, ergibt sich aus diesen Ladungen das Spannungsintegral, das zur Berechnung des g-Faktors benötigt wird:

$$Q R_{ges} = \int_0^{\frac{\tau}{4}} U_{ind} dt$$

Welches nach unseren Messungen dann die in Tabelle 3 aufgeführten Werte annimmt.

Scheitelstrom I_0	$\int_0^{\frac{\tau}{4}} U_{ind} dt$
0,849A	19,721mVs \pm 0,518mVs
0,707A	18,698mVs \pm 0,514mVs
0,566A	17,062mVs \pm 0,508mVs

Tabelle 3: Ergebnisse für das Spannungsintegral nach der Galvanometermessung

Zusätzlich zu den Werten des Integrals müssen noch einige Konstanten bekannt sein, um den g-Faktor letztendlich ausrechnen zu können. Führt man die in der Vorbereitung hergeleiteten Teil-Formeln zusammen, so ergibt sich folgende Formel für den g-Faktor:

$$\begin{aligned}
 g &= \frac{2m}{e} V \frac{\dot{M}_{max}}{D_{max}} \\
 &= \frac{2m}{e} V \frac{\frac{-4}{T\mu_0 N_2 F_{St}} \int_0^{\frac{T}{2}} U_{ind} dt + \frac{8N_1 I_0}{T l} \frac{F_{Sp}}{F_{St}}}{2\frac{1}{\tau} \omega_{res} \alpha_{res} \Theta} \\
 &= \frac{4mV\tau}{e\pi\alpha_{res}\Theta F_{St}} \left(-\frac{R_{ges}Q}{N_2\mu_0} + \frac{N_1 I_0 F_{Sp}}{l} \right)
 \end{aligned}$$

Wobei sich T und ω_{res} über einen Faktor 2π wegheben. Die Elementarladung e , Elektronenmasse m und Permeabilitätskonstante μ_0 sind bekannt. Alle übrigen Faktoren lassen sich aus gegebenen Daten über bekannte Formeln berechnen. Wir haben eingesetzt:

- Volumen des Stabes $V = 3,142 \cdot 10^{-6} m^3$
- Trägheitsmoment des Stabes $\Theta = 5 \cdot 10^{-8} \frac{kg}{m^2}$
- Stab-Querschnitt $F_{St} = 1,247 \cdot 10^{-5} m^2$
- Spulen-Querschnitt $F_{Sp} = 75,477 \cdot 10^{-5} m^2$
- Wicklungszahl Feldspule $N_1 = 1845$
- Wicklungszahl Induktionsspule $N_2 = 1000$
- Spulenlänge $l = 0,290 m$
- Schaltungswiderstand $R_{ges} = 36,857 \Omega$

Zusammen mit den von uns in den entsprechenden Versuchen gemessenen Größen Abklingdauer τ und Resonanzamplitude α_{res} ergeben sich für die jeweiligen Werte von Ladung Q und Scheitelstrom I_0 folgende g-Faktoren:

Effektivfeldstrom I_{eff}	g-Faktor
0,6A	$0,575 \pm 0,088$
0,5A	$4,776 \pm 1,127$
0,4A	$2,259 \pm 0,537$

Tabelle 4: g-Faktoren anhand der Messung mit dem Galvanometer

Wobei wir hier aus Gründen der Übersichtlichkeit und analog zur Aufgabenstellung wieder die Zuordnung zu den Effektivströmen verwenden. Die Fehler ergeben sich anhand einer Größtfehlerabschätzung, wobei nur die Fehler unserer gemessenen Größen eingehen. Die oben aufgeführten Natur- und Versuchskonstanten betrachten wir als fehlerfrei. Wir verwendeten die Größtfehlerabschätzung anstelle der Gauß'schen Fehlerfortpflanzung, da die Fehler von Auslenkungswinkel α und Abklingzeit τ korreliert sind. Gelänge es die Auslenkung präziser zu messen, so könnte auch die Abklingzeit genauer bestimmt werden, da diese ja auf einer Auslenkungsmessung beruht.

4.4 Aufgabe d - Magnetisierung mit Oszilloskop

Mit dem Oszilloskop konnten wir den Verlauf der Induktionsspannung für die drei verschiedenen Effektivfeldströme aufnehmen. In den Abbildungen 4 bis 6 ist jeweils der Betrag dieses Spannungsverlaufs über eine Periode dargestellt. Hierbei war zu beachten, dass das angeschlossene PC-Programm fortlaufende Werte speicherte. Zur Darstellung der wahren Messwerte mussten diese also mit den Einstellungen des Oszilloskops umgerechnet werden. In der Umrechnung war dann auch noch ein Verstärkungsfaktor am Messeingang zu berücksichtigen. Zusätzlich zu den Messwerten der Induktionsspannung speicherte uns das Programm den sinusförmigen Verlauf des Erregerstroms. Das Produkt dieser beiden Signale ist, wenn man es integriert, ein Maß für die Magnetisierung. Daher multiplizierten wir die Induktionsspannungen zu jedem Zeitpunkt mit dem entsprechenden Sinuswert. Allerdings verwendeten wir hierfür nicht die Sinuskurve aus den Messdaten sondern erzeugten uns, da uns die Frequenz ω_{res} ja bekannt war, die Werte selbst. Auf diese Weise umgingen wir das Problem, die Messdaten des Sinussignals normieren zu müssen. Das Produkt der Signale lieferte uns die in den Abbildungen 7 bis 9 dargestellten Verläufe.

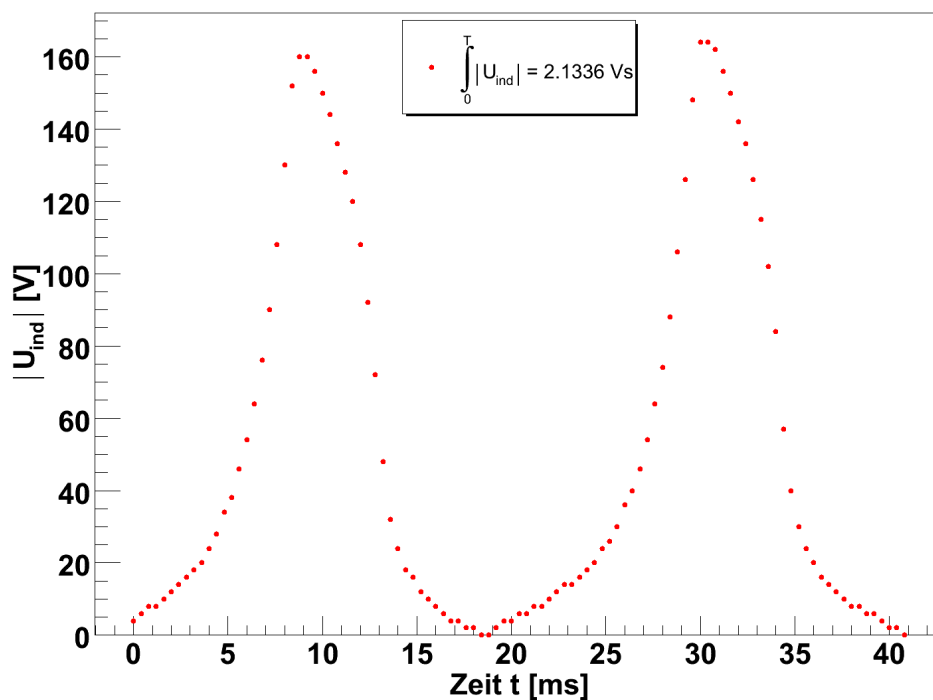


Abbildung 4: Induktionsspannung bei 0,6A Effektivfeldstrom

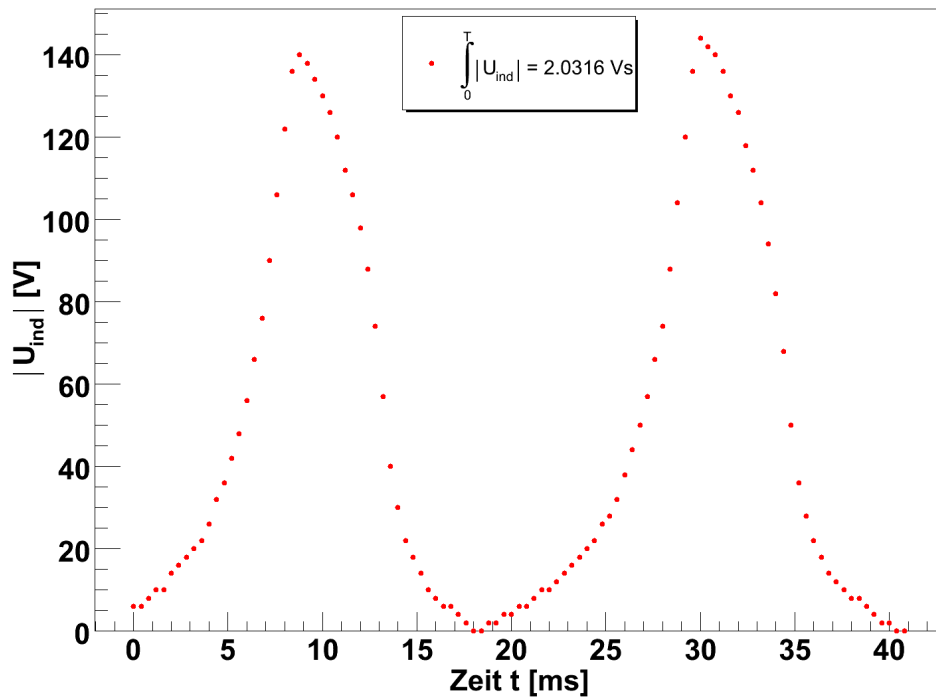


Abbildung 5: Induktionsspannung bei 0,5A Effektivfeldstrom

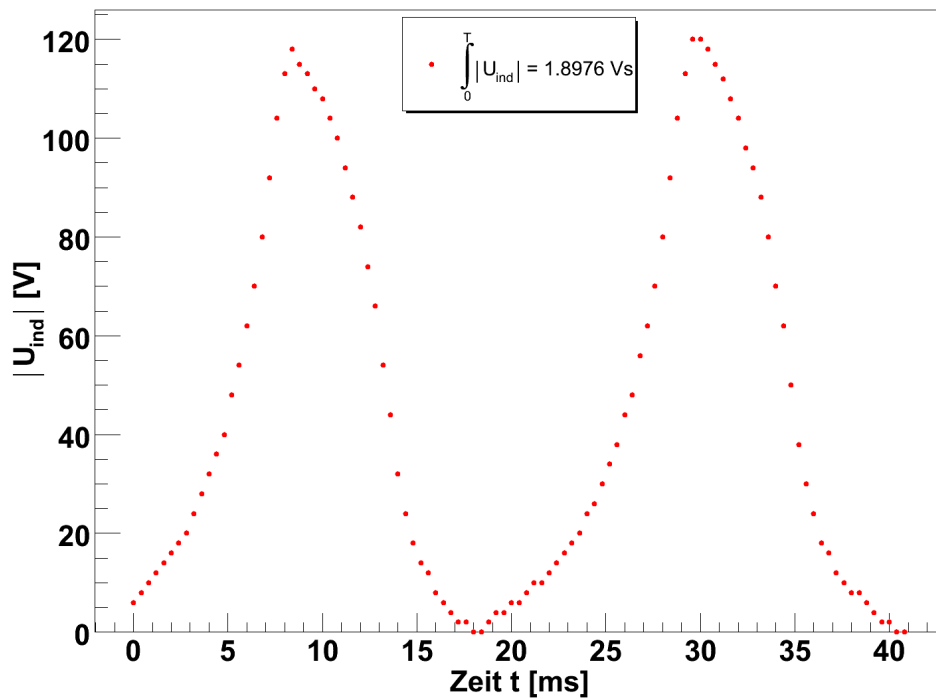


Abbildung 6: Induktionsspannung bei 0,4A Effektivfeldstrom

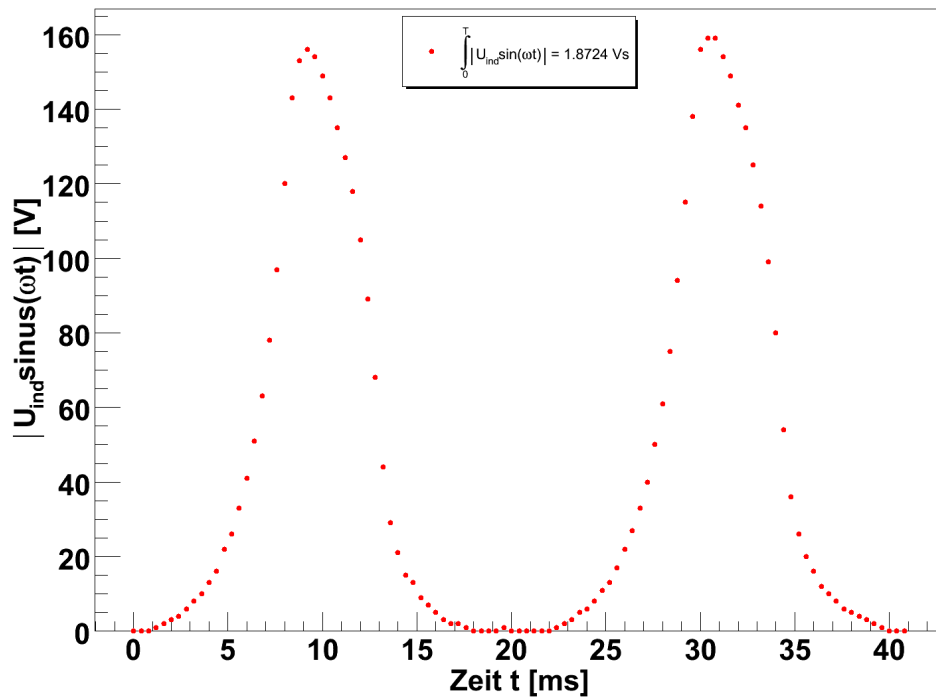


Abbildung 7: Produkt aus Induktionsspannung und Sinus bei 0,6A Effektivfeldstrom

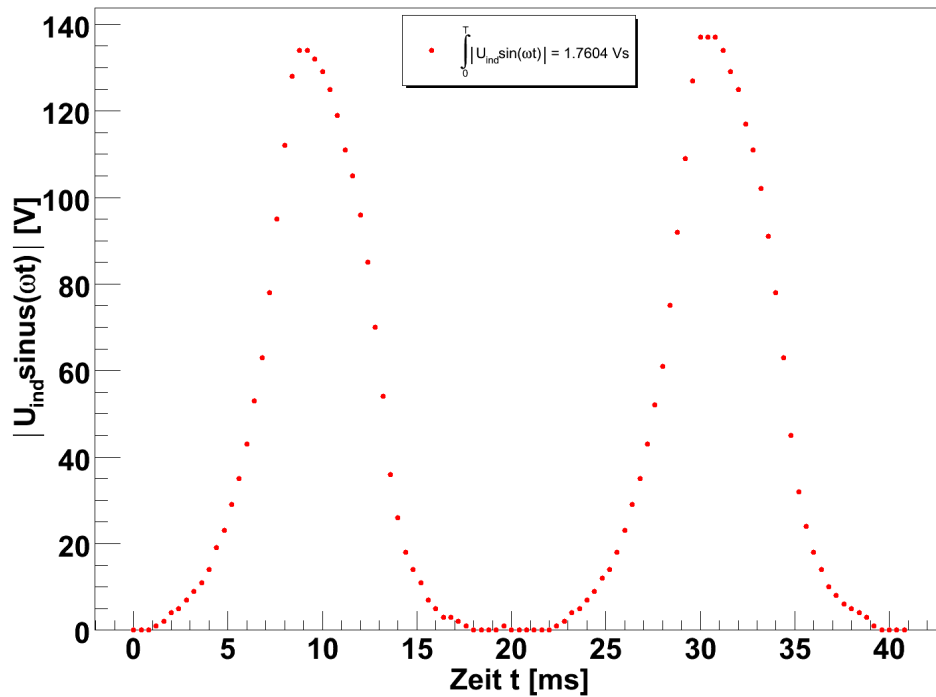


Abbildung 8: Produkt aus Induktionsspannung und Sinus bei 0,5A Effektivfeldstrom

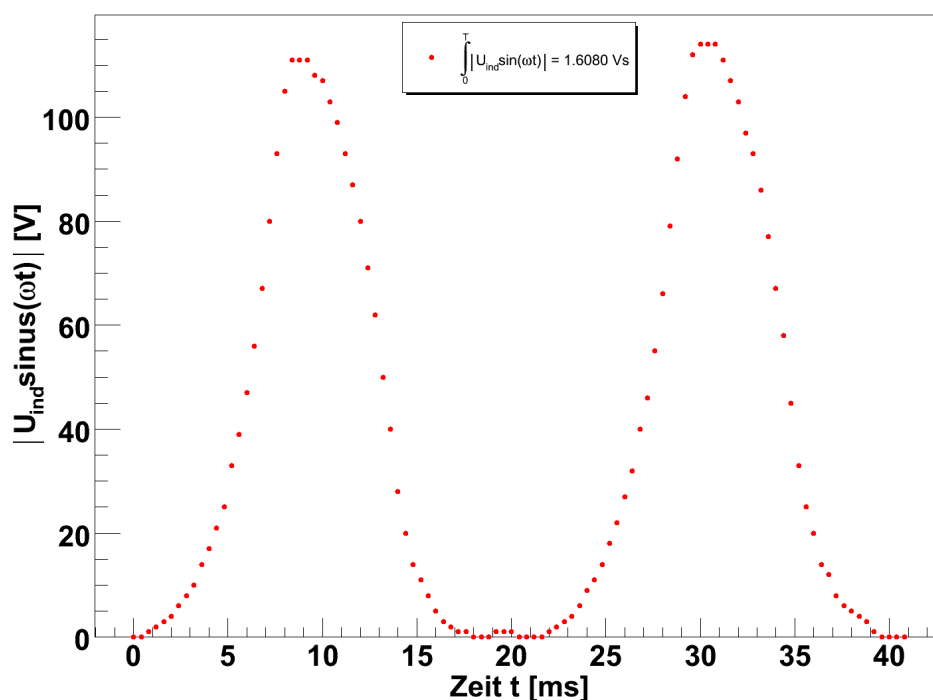


Abbildung 9: Produkt aus Induktionsspannung und Sinus bei 0,4A Effektivfeldstrom

Durch eine numerische Integration konnte aus diesen Verläufen das zur Berechnung des g-Faktors notwendige Integral berechnet werden. Unser Algorithmus berechnete die in Tabelle 5 aufgelisteten Werte, welche auch in den entsprechenden Plots angegeben sind.

Effektivfeldstrom I_{eff}	$\int_0^T U_{ind} dt$	$\int_0^T U_{ind} \sin \omega_{res} t dt$
0,6A	2,134Vs	1,872Vs
0,5A	2,032Vs	1,760Vs
0,4A	1,898Vs	1,608Vs

Tabelle 5: Numerisch berechnete Integrale der Induktionsspannung mit und ohne Sinus

Dabei dient das Integral ohne Sinus nur der Eichung. Wie in der Vorbereitung gezeigt müssen die berechneten Integrale mit Sinus noch um einen Faktor K korrigiert werden. Dieser ergibt sich aus einem Vergleich mit der Galvanometermessung. Unter Beachtung der unterschiedlichen Integrationsgrenzen fanden wir die in Tabelle 6 zusammengefassten Korrekturfaktoren.

Effektivfeldstrom I_{eff}	Korrekturfaktor K
0,6A	$3,697 \cdot 10^{-2}$
0,5A	$3,681 \cdot 10^{-2}$
0,4A	$3,597 \cdot 10^{-2}$

Tabelle 6: Korrekturfaktoren aus dem Vergleich von Galvanometer- und Oszilloskopmessung

Zusammen mit den bereits aufgelisteten Konstanten lässt sich dann der g-Faktor berechnen. Für diesen Fall ergibt sich folgende Endformel aus den verschiedenen Teil-Formeln der Vorbereitung:

$$\begin{aligned}
 g &= \frac{2m}{e} V \frac{\dot{M}_{max}}{D_{max}} \\
 &= \frac{2m}{e} V \frac{-\frac{2K}{T\mu_0 N_2 F_{St}} \int_0^T |U_{ind} \sin(\omega_{res} t)| dt + \frac{N_1 I_0 \omega_{res} F_{Sp}}{F_{St} l}}{2\frac{1}{\tau} \omega_{res} \alpha_{res} \Theta} \\
 &= \frac{mV\tau}{e \alpha_{res} \Theta F_{St}} \left(-\frac{K}{\pi\mu_0 N_2} \int_0^T |U_{ind} \sin(\omega_{res} t)| dt + \frac{N_1 I_0 F_{Sp}}{l} \right)
 \end{aligned}$$

Setzen wir die entsprechenden Werte für das Integral und den Korrekturfaktor K ein, verwenden die im vorigen Kapitel aufgeführten Konstanten und berücksichtigen die Messwerte für Abklingdauer τ sowie Resonanzamplitude α_{res} aus den jeweiligen Versuchen, so erhalten wir die in Tabelle 7 aufgeführten g-Faktoren.

Effektivfeldstrom I_{eff}	g-Faktor
0,6A	$0,411 \pm 0,048$
0,5A	$4,253 \pm 0,851$
0,4A	$2,421 \pm 0,484$

Tabelle 7: g-Faktoren anhand der Messung mit dem Oszilloskop

Die Fehler ermitteln sich, da Auslenkwinkel α und Abklingzeit τ korreliert sind, wieder über Größtfehlerabschätzung, wobei die Konstanten ebenfalls wieder ohne Fehler angenommen werden. Ebenso nehmen wir in diesem Fall den Wert des Integrals ohne Fehler an, weshalb sich auch für den Korrekturfaktor K kein Fehler ergibt. Generell lässt sich natürlich bei einer numerischen Integration ein Fehler angeben, welcher im Falle der Trapezregel durch folgende Beziehung abgeschätzt werden kann:

$$\Delta_{Trapez} \leq \frac{(T-0)^3}{12n^2} \max_{0 \leq t \leq T} |f''(t)|$$

Hierbei wird jedoch die zweite Ableitung der zu integrierenden Funktion benötigt, was zunächst eine Parametrisierung der Messdaten durch einen analytisch Ausdruck oder ein weiteres numerisches Verfahren zur Bestimmung der Ableitung erfordert hätte. Darüber hinaus ist der Fehler proportional zu $\frac{1}{n^2}$, wobei wir $n = 103$ Datenpunkte innerhalb einer Periode zur Verfügung haben. Dies entspricht bereits einer Reduzierung des Fehlers um einen Faktor $\approx 10^{-4}$.

Aus diesen Gründen haben wir den Fehler für das Induktionsspannungsintegral vernachlässigt und nur die der übrigen Messgrößen beachtet, welche weitaus dominanter sind.

5 Schlussbemerkung

Wir erhalten drei sehr stark von einander abweichende Messergebnisse für unseren g-Faktor. Wobei sich nur einer im Fehlerbereich mit dem Literaturwert von 2,002 deckt. Wir führen dies auf die enorm schwere und ungenaue Auslenkungsbestimmung zurück. Hierbei war teilweise eine gehörige Portion Optimismus nötig um sich auf einen Messwert festzulegen. Die Auswirkungen der Schwebung führten teilweise zu Schwankungen der Auslenkung um deutlich mehr als 50%.

Einzig bei der Messung mit $I_{eff} = 0,4A$, waren diese Auswirkungen, selbst über einen Zeitraum von einigen Minuten, nur minimal. Insofern hat die Auswertung unser Gefühl während der Praktikumsdurchführung bestätigt, dass wohl nur die dritte Messung ein verlässliches Ergebnis erbringen würde.

Alle anderen Fehlerfaktoren weisen keinen derart deutlichen Unterschied zwischen den Messungen für die verschiedenen Effektivströme auf, so dass diese als Ursache für die starke Abweichung nicht in Betracht kommen.