

Auswertung P1-20 – Pendel

Michael Prim & Tobias Volkenandt

7. November 2005

Vorbemerkung

Wir haben zu diesem Versuch eine Fehlerrechnung durchgeführt. Die verwendeten Verfahren befinden sich der Lesbarkeit der Auswertung willen im Anhang. Bei den einzelnen Experimenten sind die Messergebnisse natürlich zusammen mit den Ergebnissen der Fehlerrechnung dargestellt.

Aufgabe 1.1 – Bestimmung der reduzierten Pendellänge eines physikalischen Pendels

Entsprechend der Versuchsvorbereitung wurde die reduzierte Pendellänge l_r des physikalischen Pendels bestimmt. Dazu wurde von uns die Länge des Pendelstabes gemessen.

$$l_{\text{gemessen}} = 0,951\text{m} \quad l_r = \frac{2}{3} l_{\text{gemessen}} \rightarrow l_r = 0,634\text{m}$$

Aufgabe 1.2 – Bestimmung der Fallbeschleunigung mit Hilfe des Reversionspendels

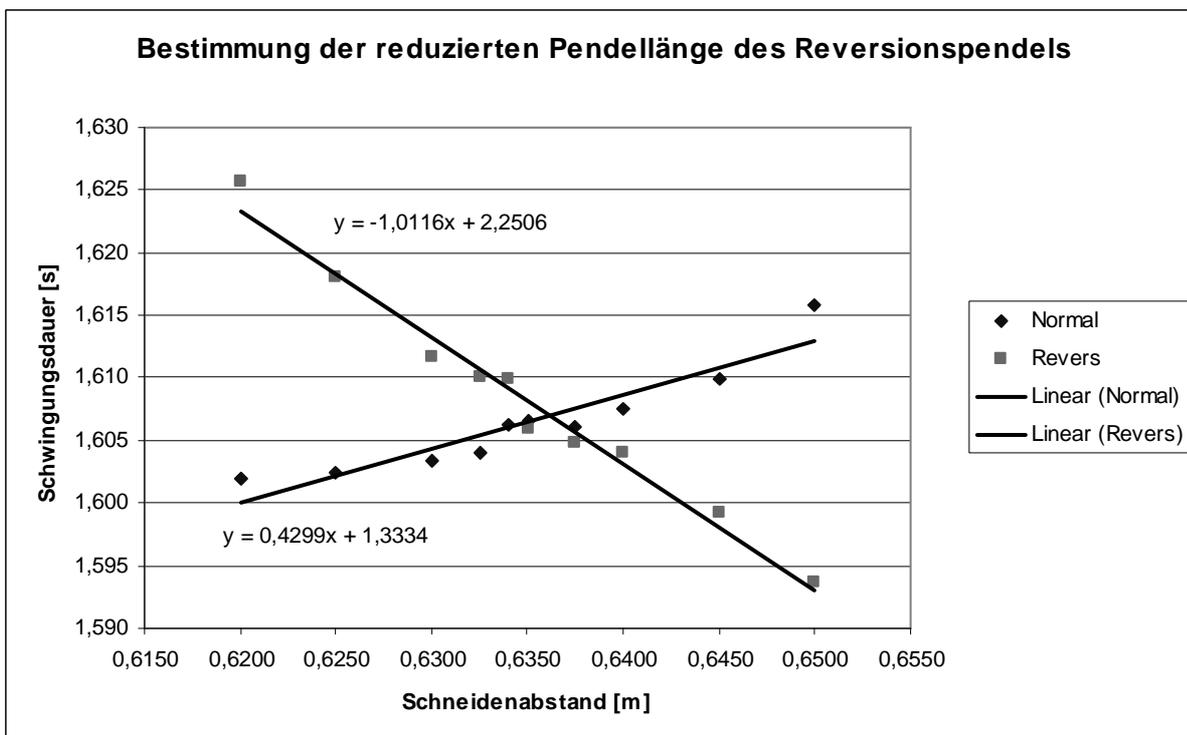
Ehe wir mit der eigentlichen Aufgabe beginnen konnten, führten wir eine Reihe von Messungen durch, um den Messoffset der Lichtschranke zu bestimmen, auf welchen wir von den Versuchsbetreuern hingewiesen wurden. In Anhang A wird das verwendete Verfahren näher erklärt. Die Messungen ergaben einen Messoffset von $0,021\text{s}$, welcher im Folgenden von allen Messergebnissen abgezogen wurde, ehe mit den Werten weitere Berechnungen angestellt wurden.

Anschließend führten wir mehrere Messungen der Schwingungsdauer des Reversionspendels durch. Hierbei entspricht T_{normal} einem Auflegen des Reversionspendels an der fixen Aufhängung und T_{rev} einem Auflegen an der variablen Aufhängung. Bei den Messungen wurde der Schneidenabstand l in der Nähe des zuvor berechneten l_r variiert. Die Messungen erfolgten jeweils über 10 Perioden. Die Tabelle gibt die daraus errechneten Zeiten für eine Periode an. Weiterhin ist der relative Eichfehler ΔT der Lichtschranken von $\pm 0,2\%$ angegeben. Es handelt sich hierbei um einen systematischen Fehler.

l [m]	T_{normal} [s]	T_{rev} [s]	ΔT_{normal} [s]	ΔT_{rev} [s]
0,6200	1,602	1,626	0,003	0,003
0,6250	1,603	1,618	0,003	0,003
0,6300	1,603	1,612	0,003	0,003
0,6325	1,604	1,610	0,003	0,003
0,6340	1,606	1,610	0,003	0,003
0,6350	1,607	1,606	0,003	0,003
0,6375	1,606	1,605	0,003	0,003
0,6400	1,608	1,604	0,003	0,003
0,6450	1,610	1,599	0,003	0,003
0,6500	1,616	1,594	0,003	0,003

Anschließend konnten wir die Schwingungsdauern über dem Schneidenabstand für beide Pendelvarianten in einem Diagramm auftragen. Da wir den Messbereich um l_r nicht allzu groß gewählt haben, können wir von einem annähernd linearen Verlauf der beiden Kurven ausgehen und die zugehörigen Regressionsgeraden berechnen. Am Schnittpunkt beider Geraden befindet sich das tatsächliche l_r des Pendels, dessen Wert wir durch Gleichsetzen beider Geraden erhalten, ebenso wie die zu dieser Pendellänge gehörende Schwingungsdauer $T(l_r)$.

$$l_r = \frac{b_{rev} - b_{normal}}{m_{normal} - m_{rev}} = 0,6362m \pm \Delta l_r$$



Für die Regressionsgerade des normal herum aufgelegten Pendels ergibt sich hierbei ein zufälliger Fehler in der Steigung von $\Delta m_{normal} = \pm 0,0577 \%$ und im Achsenabschnitt von $\Delta b_{normal} = \pm 0,0366s$.

Für die Regressionsgerade des revers herum aufgelegten Pendels ergibt sich hierbei ein zufälliger Fehler in der Steigung von $\Delta m_{rev} = \pm 0,0556 \frac{s}{m}$ und im Achsenabschnitt von $\Delta b_{rev} = \pm 0,0353s$.

Mit der Gauss'schen Fehlerfortpflanzung (siehe Anhang B) bestimmten wir anschließend den sich ergebenden Fehler Δl_r für l_r .

$$\Delta l_r = \sqrt{\frac{\Delta b_{rev}^2 + \Delta b_{normal}^2}{(m_{normal} - m_{rev})^2} + \frac{(b_{rev} - b_{normal})^2 (\Delta m_{rev}^2 + \Delta m_{normal}^2)}{(m_{normal} - m_{rev})^4}} = 0,0496m$$

→ Reduzierte Pendellänge $l_r = 0,6362m \pm 0,0496m$

Eine der beiden Geradengleichungen kann nach l_r aufgelöst und in die andere Gleichung eingesetzt werden. Anschließend kann die neue Gleichung nach der Periodendauer T aufgelöst werden.

$$T = \frac{-m_{normal} b_{rev} + b_{normal} m_{rev}}{m_{rev} - m_{normal}} \quad \text{Im Folgenden: } m_{normal} = m_n, m_{rev} = m_r, b_{normal} = b_n, b_{rev} = b_r$$

Mit der Gauss'schen Fehlerfortpflanzung (siehe Anhang B) können wir nun daraus den zufälligen Fehler ΔT_z bestimmen.

$$\Delta T = \sqrt{\frac{(-b_r m_r + b_n m_r)^2 \Delta m_n^2 + (b_r m_n - b_n m_n)^2 \Delta m_r^2}{(m_r - m_n)^4} + \frac{m_r^2 \Delta b_n^2 + m_n^2 \Delta b_r^2}{(m_r - m_n)^2}} = 0,0393s$$

Der systematische Fehler ΔT_s der Periodendauer beträgt $\pm 0,2\%$ bzw. $\Delta T_s = 0,0032s$ und resultiert aus dem Eichfehler der Lichtschranke.

→ Schwingungsdauer $T(l_r) = 1,6070s \pm 0,0393s \pm 0,0032s$

Die Gleichung für die Schwingungsdauer beim mathematischen Pendel ist bekannt, so dass wir selbige nach g umformen können um anschließend mit der reduzierten Pendellänge l_r und der Schwingungsdauer $T(l_r)$ die Erdbeschleunigung g zu bestimmen.

$$T(l_r) = 2\pi \sqrt{\frac{l_r}{g}} \quad \rightarrow \quad g = \frac{4\pi^2 l_r}{T(l_r)^2} = 9,7263 \frac{m}{s^2} \pm \Delta g_z \pm \Delta g_s$$

Mit der Gauss'schen Fehlerfortpflanzung (siehe Anhang B) kann nun einmal der zufällige Fehler Δg_z für g bestimmt werden und weiterhin der systematische Fehler Δg_s .

$$\Delta g_z = \sqrt{\frac{64\pi^2 l_r^2 \Delta T_z^2}{T(l_r)^6} + \frac{16\pi^2 \Delta l_r^2}{T(l_r)^4}} = 0,2849 \frac{m}{s^2} \quad \Delta g_s = \sqrt{\frac{64\pi^2 l_r^2 \Delta T_s^2}{T(l_r)^6}} = 0,0116 \frac{m}{s^2}$$

→ Erdbeschleunigung $g = 9,7263 \frac{m}{s^2} \pm 0,2849 \frac{m}{s^2} \pm 0,0116 \frac{m}{s^2}$

Aufgabe 2.1 – Bestimmung der Fallbeschleunigung mit Hilfe des Fadenpendels bei kleinen Auslenkungen

Auch hier musste zunächst wie in Aufgabe 1.2 beschrieben der Messoffset der Lichtschranke bestimmt werden. Es wurde das bewährte Verfahren (siehe Anhang A) angewendet, welches einen Messoffset von $0,026\text{s}$ ergab. Er wurde im Folgenden wieder von allen Messergebnissen abgezogen, ehe weitere Berechnungen damit durchgeführt wurden.

Anschließend waren einige Parameter der Versuchsanordnung durch Messung zu bestimmen:

Fadenlänge $l_F = 2,495\text{m} \pm 0,003\text{m}$

Radius der Kugel $r_K = 0,03025\text{m} \pm 0,0005\text{m}$

Masse der Kugel $m = 0,860\text{kg}$ (gegeben aus der Aufgabenstellung)

Danach konnte die Messung der Schwingungsdauer beginnen. Wir beschränkten uns dabei auf kleine Auslenkungen und haben stets über 10 Perioden gemessen. Für eine Periode ergaben sich folgende Messwerte:

$T_{Faden} [\text{s}]$
3,182
3,183
3,184
3,184
3,184
3,014
3,184
3,011
3,011
3,183
3,183
3,183
3,183
3,010
3,184

Hieraus ergibt sich eine mittlere Periodendauer von: $\bar{T}_{Faden} = 3,138\text{s} \pm \Delta\bar{T}_{Faden} \pm \Delta T_{sys}$

Der Fehler $\Delta\bar{T}_{Faden}$ wurde hierbei mit dem Verfahren der Standardabweichung des Mittelwertes (siehe Anhang B) bestimmt und ergab $\Delta\bar{T}_{Faden} = 0,020\text{s}$.

Beim Fehler ΔT_{sys} handelt es sich wieder um den systematischen Fehler von $\pm 0,2\%$, aus der Eichungenauigkeit der Lichtschranke. Folglich beträgt $\Delta T_{sys} = 0,006\text{s}$.

Da ein Fadenpendel nahezu als mathematisches Pendel betrachtet werden kann, könnte man mit diesem Wert aus der bekannten Berechnungsformel für die Schwingungsdauer die Fallbeschleunigung errechnen. Allerdings schien es uns bei Größe und Masse der Kugel nicht sinnvoll diese als punktförmig zu betrachten. Daher muss ihr Trägheitsmoment berücksichtigt werden. Dieses berechnet sich nach dem Steiner'schen Satz anhand der

Summe aus dem Trägheitsmoment bezogen auf eine Achse durch den Mittelpunkt der Kugel und dem Trägheitsmoment bezogen auf den Aufhängepunkt im Abstand $(l_F + r_K)$:

$$J_{\text{Kugel}} = J_{\text{MP}} + J_{\text{AP}} = \frac{2}{5} m r_K^2 + m(l_F + r_K)^2$$

Dadurch ergibt sich eine neue Formel für die Schwingungsdauer, die nach der Fallbeschleunigung aufgelöst werden kann und uns folgenden Wert lieferte:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{mgs}} \quad \rightarrow \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{\frac{2}{5} r_K^2 + (l_F + r_K)^2}{g(l_F + r_K)}}$$

$$\rightarrow g = 4\pi^2 \frac{\frac{2}{5} r_K^2 + (l_F + r_K)^2}{\bar{T}_{\text{Faden}}^2 (l_F + r_K)} = 10,1277 \text{ m/s}^2 \pm \Delta g_z \pm \Delta g_s$$

Zur Bestimmung des systematischen Fehlers Δg_s , konnten wir aufgrund der Unabhängigkeit der systematischen Fehler von l_F , r_K und \bar{T}_{Faden} wieder die Gauss'sche Fehlerfortpflanzung (siehe Anhang B) verwenden.

$$\Delta g_s = \sqrt{\frac{8\pi^4 (\frac{14}{5} r_K l_F T^2 + \frac{7}{5} r_K^2 T^2 + T^2 l_F^2)^2 \Delta r_K^2}{(T^2 l_F + T^2 r_K)^4} + \frac{8\pi^4 (T^2 l_F^2 + 2T^2 r_K l_F + \frac{3}{5} r_K^2 T^2)^2 \Delta l_F^2}{(T^2 l_F + T^2 r_K)^4} + \frac{64\pi^4 (\frac{7}{5} r_K^2 + l_F^2 + 2l_F r_K)^2 \Delta T_{\text{sys}}^2}{(T^3 l_F + T^3 r_K)^2}} = 0,2018 \text{ m/s}^2$$

Zur Bestimmung des zufälligen Fehlers Δg_z , konnten wir ebenfalls die Gauss'sche Fehlerfortpflanzung (siehe Anhang B) verwenden.

$$\Delta g_z = \sqrt{\frac{64\pi^4 (\frac{7}{5} r_K^2 + l_F^2 + 2l_F r_K)^2 \Delta \bar{T}_{\text{Faden}}^2}{(T^3 l_F + T^3 r_K)^2}} = 0,1291 \text{ m/s}^2$$

$$\rightarrow \text{Erdbeschleunigung } g = 10,1277 \text{ m/s}^2 \pm 0,1291 \text{ m/s}^2 \pm 0,2018 \text{ m/s}^2$$

Es fällt auf, dass der von uns gemessene Wert deutlich vom Literaturwert abweicht. Bei genauer Betrachtung der Messwerte fällt zudem auf, dass diese zwei Intervallen zugeordnet werden können. Eines um $T = 3,183\text{s}$ und eines um $T = 3,011\text{s}$. Die Differenz von *17 hundertstel* Sekunden ist deutlich.

Vernachlässigen wir die Werte des zweiten Intervalls und berechnen g mit einer neuen mittleren Periodendauer $\bar{T}_{\text{neu}} = 3,183\text{s} \pm 0,00012\text{s} \pm 0,00637\text{s}$ erhalten wir mit der erneuten Berechnung der Fehler den wesentlich besseren Wert:

$$\rightarrow \text{Erdbeschleunigung } g_{\text{neu}} = 9,8382 \text{ m/s}^2 \pm 0,0007 \text{ m/s}^2 \pm 0,1986 \text{ m/s}^2$$

Wir führen diese Abweichung auf eine innerhalb der Lichtschranke zufällig aber konstant auftretende Ungenauigkeit zurück. Fehler der Experimentatoren sind soweit möglich ausgeschlossen worden. Ein Verwerfen der Daten nach dem Chauvenet'schen Kriterium ist jedoch nicht erlaubt, daher soll die Unregelmäßigkeit nur kurz erwähnt und nicht weiter untersucht werden.

Zum Vergleich kann nun noch eine Berechnung der Erdbeschleunigung durchgeführt werden, wenn die Ausdehnung der Kugel vernachlässigt und selbige als punktförmige Masse im Abstand $l_F + r_K$ betrachtet wird. Diese Berechnung war oben von uns als zu ungenau ausgeschlossen worden.

$$\text{Aus } T = 2\pi \sqrt{\frac{l_F + r_K}{g}} \text{ folgt somit } g_* = \frac{4\pi^2 (l_F + r_K)}{T^2} = 10,1271 \text{ m/s}^2 \pm \Delta g_{z^*} \pm \Delta g_{s^*}$$

Die Fehler Δg_{z^*} und Δg_{s^*} lassen sich wieder nach der bewährten Gauss'schen Fehlerfortpflanzung (siehe Anhang B) berechnen.

$$\Delta g_{z^*} = \sqrt{\frac{64\pi^4 (l_F + r_K)^2 \Delta \bar{T}_{Faden}^2}{T^6}} = 0,1291 \text{ m/s}^2$$

$$\Delta g_{s^*} = \sqrt{\frac{16\pi^4 (\Delta l_F^2 + \Delta r_K^2)}{T^4} + \frac{64\pi^4 (l_F + r_K)^2 \Delta T_{sys}^2}{T^6}} = 0,04059 \text{ m/s}^2$$

→ Erdbeschleunigung $g_* = 10,1271 \text{ m/s}^2 \pm 0,1291 \text{ m/s}^2 \pm 0,0406 \text{ m/s}^2$

Auch hier kann man alle Berechnungen noch einmal mit \bar{T}_{neu} durchführen.

→ Erdbeschleunigung $g_{neu^*} = 9,8376 \text{ m/s}^2 \pm 0,0007 \text{ m/s}^2 \pm 0,04112 \text{ m/s}^2$

Vergleicht man nun beide Ergebnisse für die Erdbeschleunigung, so zeigt sich, dass die Berücksichtigung der Ausdehnung der Kugel eigentlich nicht nötig gewesen wäre. Die Ergebnisse unterscheiden sich frühestens in der dritten Dezimalstelle. Das Fadenpendel kann also „guten Gewissens“ als genähertes mathematisches Pendel bezeichnet werden.

Aufgabe 2.2 – Untersuchung der Schwingungsdauer in Abhängigkeit von der Schwingungsweite

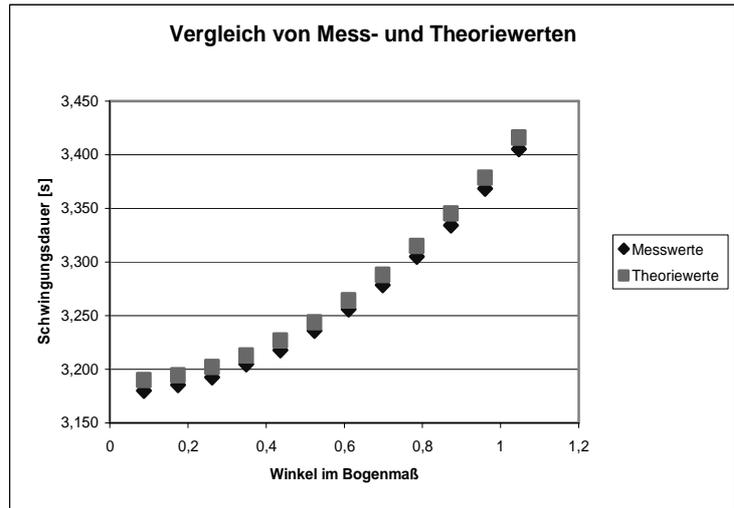
Dieser Versuch sollte zeigen, wie sich die Schwingungsdauer des Fadenpendels bei verschiedenen, insbesondere großen, Auslenkungen verhält. Wir haben dazu beginnend bei großen Winkeln die Schwingungsdauer über 4 Perioden je 3 mal gemessen. Daraus ergaben sich die unten aufgeführten Mittelwerte für eine Periode.

Erwartungsgemäß war zu beobachten, dass für große Winkel die Näherung $\sin \varphi = \varphi$ nicht mehr gilt. Stattdessen muss die exakte, nichtlineare Differentialgleichung $J\ddot{\varphi} + mg \sin \varphi = 0$ gelöst werden, was zu einer genaueren Formel für die Schwingungsdauer führt:

$$T_{entw} = 2\pi \sqrt{\frac{\frac{2}{5} r_K^2 + (l_F + r_K)^2}{g(l_F + r_K)}} \cdot \left(1 + \frac{1}{4} \sin^2 \left(\frac{\varphi}{2} \right) + \frac{9}{64} \sin^4 \left(\frac{\varphi}{2} \right) + \dots \right)$$

Berechnet man anhand dieser Entwicklung die erwarteten Schwingungsdauern für die jeweiligen Auslenkungen, so fällt im Vergleich auf, dass die Voraussagen erstaunlich nahe an den Messwerten liegen. Dies lässt sich auch im Diagramm gut erkennen.

φ [°]	T_{gemessen} [s]	T_{entw} [s]
60	3,405	3,416
55	3,369	3,379
50	3,334	3,345
45	3,305	3,315
40	3,279	3,288
35	3,256	3,264
30	3,236	3,244
25	3,218	3,227
20	3,205	3,213
15	3,193	3,202
10	3,186	3,195
5	3,180	3,190



Das Fadenpendel kann also als eine sehr gute Näherung des mathematischen Pendels betrachtet werden, sofern gewisse Rahmenbedingungen erfüllt sind. (Kleine Auslenkungswinkel und schwere Kugel an möglichst langen und leichten Faden)

Aufgabe 3.1 – Einstellen zweier Pendel auf gleiche Schwingungsdauern

Vorbereitend für die folgenden Versuche sollten hier nur zwei identische Scheibenpendel so eingestellt werden, dass ihre Schwingungsdauern übereinstimmen. Dies konnte durch Verschieben der Pendelscheiben geschehen. Da jedoch direkt vor uns, eine zweite Gruppe diesen Versuch durchgeführt hat, nahmen wir die Einstellung der Pendel als korrekt an. Wir überzeugten uns trotzdem anhand einiger Messungen über jeweils 10 Perioden, dass die Schwingungsdauern gleich waren.

T_1 [s]	T_2 [s]
1,923	1,929
1,929	1,928
1,923	1,922
\bar{T}_1 1,925	\bar{T}_2 1,926

Bei diesem und den folgenden Versuchen konnte keine Lichtschranke verwendet werden. Die Versuche wurden daher mit einer gewöhnlichen Stoppuhr per Hand durchgeführt. Im Folgenden waren noch die Pendellänge (also der Abstand Drehpunkt – Pendelscheibenmitte) und die Pendelmasse relevant, welche im Zuge dieses Versuchs von uns bestimmt wurden:

Gemessene Pendellänge $L_z = 1,002\text{m}$

Errechnete Pendelmasse $m = m_{\text{Scheibe}} + m_{\text{Stab}} + m_{\text{Kopplung}} = 1,973\text{kg}$

Bei Berechnung der Masse war zu beachten, dass in der gegebenen Scheibenmasse bereits ein Anteil der Stabmasse enthalten war. Die Masse des restlichen Stabes konnte anhand des Produkts aus angegebener Längendichte und Stablänge errechnet werden. Wobei die Stablänge gleich der Pendellänge L_z war, abzüglich des Radius r_s der Scheibe. Die Masse des Kopplungshakens war ebenfalls gegeben.

Aufgabe 3.2 – Bestimmung der Fundamental-Schwingungsdauern der gekoppelten Pendel

Die in Versuch 3.1 gleich eingestellten Pendel wurden nun mittels einer Schraubenfeder mit der Federhärte D gekoppelt. Die Kopplung sollte nicht zu stark sein. Für zwei verschiedene Kopplungsabstände l_1 und l_2 zum Drehpunkt konnten wir dann die Schwingungsdauern messen, wenn die Pendel genau gleich- oder genau gegenphasig schwingen. Wir nahmen 5 Messungen über je 5 Perioden auf. Umgerechnet auf eine Periode ergaben sich folgende gemittelten Schwingungsdauern:

$l = 0,25m$		$l = 0,30m$	
T_{gleich} [s]	T_{gegen} [s]	T_{gleich} [s]	T_{gegen} [s]
1,89	1,75	1,90	1,68
1,93	1,76	1,93	1,69
1,92	1,75	1,93	1,68
1,90	1,75	1,92	1,68
1,90	1,75	1,93	1,68
\bar{T}_{gleich} 1,91	\bar{T}_{gegen} 1,75	\bar{T}_{gleich} 1,92	\bar{T}_{gegen} 1,68

Man erkennt, dass die Schwingungsdauer der gleichphasigen Schwingung von der Kopplung unabhängig ist und mit der ungekoppelten Schwingung (siehe Versuch 3.1) übereinstimmt. Die Schwingungsdauer der gegenphasigen Schwingung hingegen hängt deutlich von der Kopplung ab. Dies ist verständlich, da bei gleichphasiger Schwingung die Feder zwischen den Pendeln kaum gedehnt oder gestaucht wird. Bei gegenphasiger Schwingung jedoch sehr stark, da die Pendel sich entweder beide aufeinander zu oder voneinander weg bewegen. Die Feder übt dann eine beschleunigende Kraft aus, weswegen die Schwingungsdauer umso niedriger je stärker die Kopplung ist.

Im Anschluss sollten aus den Messergebnissen zwei Größen berechnet werden. In der Vorbereitung wurde bereits gezeigt, dass für diese Größen folgender Zusammenhang gilt:

$$\omega_0^2 = \frac{mgL_Z}{J} \quad \text{und} \quad \Omega^2 = \frac{Dl^2}{J}$$

Ganz allgemein gilt $\omega = \frac{2\pi}{T}$ also $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$. Zudem gilt für eine gleichphasige Schwingung

$\omega_{\text{gleich}} = \omega_0$, während für eine gegenphasige Schwingung gilt $\omega_{\text{gegen}} = \sqrt{\omega_0^2 + 2\Omega^2}$ bzw.

$\Omega = \sqrt{\frac{\omega_{\text{gegen}}^2 - \omega_0^2}{2}}$. Aus den gemessenen Schwingungsdauern gewinnen wir damit zunächst folgende Werte:

	ω_{gleich} [1/s]	ω_{gegen} [1/s]	ω_0 [1/s]	Ω [1/s]
Kopplung $l = 0,25m$	3,29	3,59	3,29	1,02
Kopplung $l = 0,30m$	3,27	3,74	3,27	1,28

Anschließend lässt sich das Trägheitsmoment aus der umgeformten Formel $J_{\text{mess}} = \frac{mgL_Z}{\omega_{\text{gleich}}^2}$ errechnen.

Zum Vergleich kann man das Trägheitsmoment jedoch auch anhand der Elemente des Aufbaus berechnen. Es ergibt sich dann aus der Summe der Trägheitsmomente des Stabes, der Pendelscheibe und des Kopplungshakens. Aus der Vorbereitung für Versuch 1.1 ist das Trägheitsmoment eines Stabes bei Drehung um eines der Enden bekannt. Das Trägheitsmoment der Pendelscheibe wird nach dem Steiner'schen Satz berechnet. Es ist das Trägheitsmoment einer Scheibe addiert zum Produkt aus Abstandsquadrat und Masse. Der Kopplungshaken wird aufgrund seiner geringen Ausdehnung als punktförmig angenommen und geht daher nur als Produkt aus Masse und Kopplungsabstand im Quadrat in die Gesamtrechnung mit ein.

$$J_{\text{rech}} = J_{\text{Stab}} + J_{\text{Scheibe}} + J_{\text{Kopplung}} = \frac{1}{3} m_{\text{Stab}} (L_Z - r_S)^2 + \frac{1}{2} m_{\text{Scheibe}} r_S^2 + m_{\text{Scheibe}} L_Z^2 + m_{\text{Kopplung}} l^2$$

Für die verschiedenen Kopplungslängen ergaben sich schließlich folgende Werte des Trägheitsmoments:

	J_{mess} [m ² kg]	J_{rech} [m ² kg]
Kopplung $l = 0,25\text{m}$	1,793	1,444
Kopplung $l = 0,30\text{m}$	1,812	1,445

Man kann erkennen, dass der Unterschied zwischen den gemessenen und errechneten Trägheitsmomenten nicht übermäßig groß ist und zumindest die Größenordnung gut übereinstimmt.

Ähnlich wie für das Trägheitsmoment kann aus der zweiten Beziehung von oben die Federkonstante D bestimmt werden. Kennt man das Trägheitsmoment, ergibt sich die Formel hierfür zu $D_{\text{Pendel}} = \frac{\Omega^2 J}{l^2} = \frac{(\omega_{\text{gegen}}^2 - \omega_{\text{gleich}}^2) J}{2 \cdot l^2}$. Unter Verwendung der gemessenen wie auch der errechneten Trägheitsmomente erhielten wir folgende Werte für die Federkonstante:

	D_{mess} [N/m]	D_{rech} [N/m]
Kopplung $l = 0,25\text{m}$	29,74	23,96
Kopplung $l = 0,30\text{m}$	32,83	26,18
	$\bar{D}_{\text{mess}} = 31,29 \text{ N/m} \pm 2,18 \text{ N/m}$	$\bar{D}_{\text{rech}} = 25,07 \text{ N/m} \pm 1,57 \text{ N/m}$

Allerdings lässt sich die Federkonstante auch auf anderen Wegen berechnen. Wir haben zum Vergleich zwei weitere Messungen angestellt. Einmal dynamisch und einmal statisch.

Bei der dynamischen Bestimmung der Federkonstante lässt man eine Masse m_{dyn} an der Feder schwingen. Aus den Beziehungen für Federpendel ist bekannt, dass dann die Formel $T = 2\pi \sqrt{\frac{m_{\text{dyn}}}{D_{\text{dyn}}}}$ für die Schwingungsdauer gilt. Wir haben T für verschiedene Massen über jeweils 10 Perioden gemessen und konnten daraus D_{dyn} bestimmen.

m_{dyn} [kg]	T [s]	D_{dyn} [N/m]
0,2	0,59	22,67
0,4	0,83	23,01
0,5	0,91	23,69

$$\bar{D}_{\text{dyn}} = 23,12 \text{ N/m} \pm 0,52 \text{ N/m}$$

Bei der statischen Bestimmung der Federkonstanten verwendet man das Hooke'sche Gesetz $m_{\text{stat}}g = D_{\text{stat}}s$, indem man schlichtweg die Feder mit einer Masse m_{stat} belastet und die Ausdehnung s der Feder misst. Wir haben auch dies für verschiedene Massen durchgeführt und D_{stat} bestimmt.

m_{stat} [kg]	s [m]	D_{stat} [N/m]
0,1	0,044	22,29
0,2	0,083	23,63
0,3	0,124	23,73
0,4	0,163	24,07
0,5	0,204	24,04
0,6	0,244	24,11
0,7	0,284	24,17

$$\bar{D}_{\text{stat}} = 23,72 \text{ N/m} \pm 0,66 \text{ N/m}$$

Betrachten wir nun die Mittelwerte dieser Vergleichsmessungen und die Mittelwerte der Ergebnisse aus der Pendel-Schwingung, so zeigt sich eine Übereinstimmung im Bereich der Größenordnung.

$$\bar{D}_{\text{mess}} = 31,29 \text{ N/m} \pm 2,18 \text{ N/m}$$

$$\bar{D}_{\text{rech}} = 25,07 \text{ N/m} \pm 1,57 \text{ N/m}$$

$$\bar{D}_{\text{dyn}} = 23,12 \text{ N/m} \pm 0,52 \text{ N/m}$$

$$\bar{D}_{\text{stat}} = 23,72 \text{ N/m} \pm 0,66 \text{ N/m}$$

Aufgabe 3.3 – Zusammenhang zwischen modulierender, oszillierender, gleichphasiger und gegenphasiger Schwingungsdauer

Wir führten bei den gekoppelten Pendeln aus den vorherigen Versuchen mit einer Kopplungslänge von $l=0,30\text{m}$ weitere Messungen durch. Hierbei lenkten wir nur ein Pendel aus, wodurch der Fall einer Schwebung eintrat. Im Schwebungsfall wurden von uns die oszillierende Schwingungsdauer T_{osz} und die modulierende Schwingungsdauer T_{mod} gemessen. Hierbei konnte aufgrund der langen Periodendauer T_{mod} sogar direkt über eine Periode gemessen werden, wohingegen wir T_{osz} über 5 Perioden gemessen haben.

T_{osz} [s]	T_{mod} [s]
1,79	25,84
1,81	26,77
1,84	26,81
1,83	26,63
1,81	26,71
1,84	26,34
\bar{T}_{osz} 1,82	\bar{T}_{mod} 26,52

Nach den in der Vorbereitung hergeleiteten Formeln für T_{osz} und T_{mod} konnten wir die beiden Schwingungsdauer auch aus den zuvor gemessenen Schwingungsdauern T_{gleich} und T_{gegen} berechnen und mit unseren Messergebnissen vergleichen.

$$T_{osz} = \frac{2T_{gleich}T_{gegen}}{T_{gleich} + T_{gegen}} = 1,79\text{s} \qquad T_{mod} = \frac{2T_{gleich}T_{gegen}}{T_{gleich} - T_{gegen}} = 26,88\text{s}$$

Da die oszillierende Frequenz einen Phasensprung durchführt nachdem das Pendel angehalten hat und wieder angetrieben wird, ist bei den Messungen Vorsicht geboten. Die Theoriewerte stimmen jedoch mit den Mittelwerten der Messergebnisse sehr gut überein, was die korrekte Durchführung der Messung bestätigt.

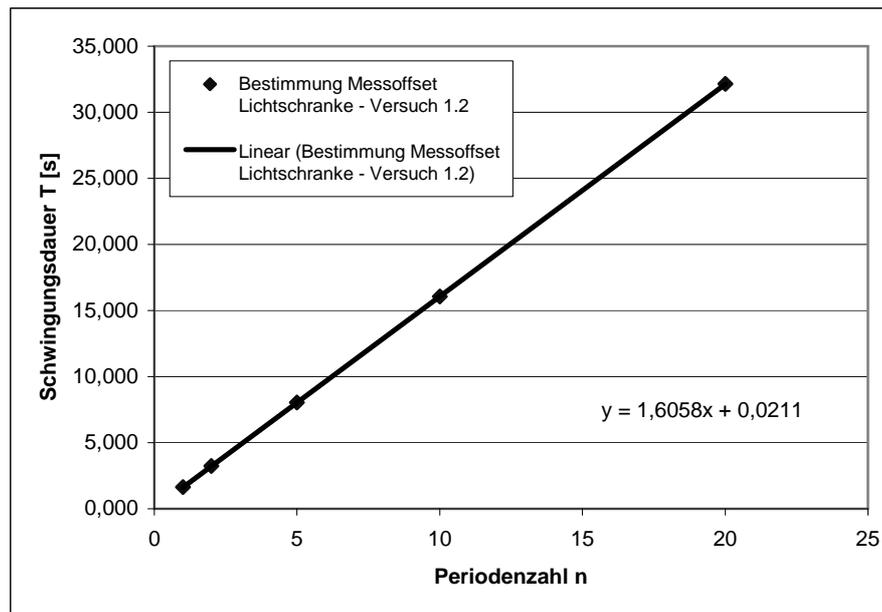
Anhang A – Verfahren zur Bestimmung des Messoffsets

Es wurden mehrere Messungen der Schwingungsdauer eines Pendels durchgeführt, wobei bei jeder Messung über eine andere Anzahl von Perioden n gemessen wurde. Trägt man die Ergebnisse dieser Messungen in einem Diagramm auf, wäre zu erwarten, dass für eine Messung über 0 Schwingungen, die Schwingungsdauer auch 0 Sekunden beträgt. Tatsächlich zeigt sich jedoch ein Offset, welcher technisch bedingt ist und daher von allen Messungen zunächst abgezogen werden muss. Dieser kann, laut Aussage des Versuchsbetreuers, auch negativ sein und muss dann gegebenenfalls zu den Messzeiten addiert werden.

Lichtschanke - Reversionspendel

n	Zeit [s] = $T \cdot n$
1	1,631
2	3,236
5	8,050
10	16,065
20	32,143

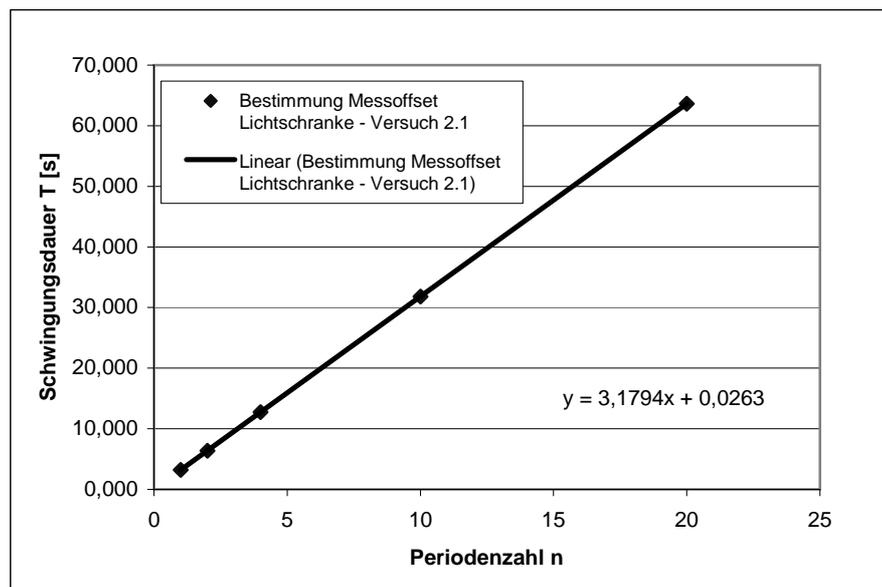
Offset = 0,021s



Lichtschanke - Fadenpendel

n	Zeit [s] = $T \cdot n$
1	3,210
2	6,390
4	12,740
10	31,810
20	63,620

Offset = 0,026s



Anhang B – Verwendete Verfahren zur Fehlerrechnung

Arithmetischer Mittelwert:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

Standardabweichung:

$$s_x = \sqrt{\frac{1}{(n-1)} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

Standardabweichung vom Mittelwert:

$$s_{\bar{x}} = \frac{s_x}{\sqrt{n}}$$

Gauss'sche Fehlerfortpflanzung:

Findet Anwendung, wenn die Unabhängigkeit der Messabweichungen gegeben ist.

$$\Delta q = \sqrt{\left(\frac{\partial q}{\partial x_1}\right)^2 \Delta x_1^2 + \left(\frac{\partial q}{\partial x_2}\right)^2 \Delta x_2^2 + \dots}$$

Arithmetische Fehlerfortpflanzung bzw. Größtfehlerabschätzung:

Findet Anwendung, wenn die Unabhängigkeit der Messabweichungen nicht gegeben ist.

$$\Delta q = \left| \frac{\partial q}{\partial x_1} \right| \Delta x_1 + \left| \frac{\partial q}{\partial x_2} \right| \Delta x_2 + \dots$$