

# Lebensdauer von Positronium

Michael Prim, Tobias Volkenandt  
Gruppe 37

12. November 2007

## Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Ziel des Versuchs</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Theoretische Grundlagen</b>	<b>2</b>
2.1	Paarvernichtung . . . . .	2
2.2	Bildung von Positronium . . . . .	2
2.3	Positronium im Festkörper . . . . .	3
2.4	$^{22}\text{Na}$ -Quelle . . . . .	3
<b>3</b>	<b>Versuchsdurchführung</b>	<b>4</b>
3.1	Aufbau . . . . .	4
3.2	Quellenspektrum und Zeiteichung . . . . .	4
3.3	Messung . . . . .	4
<b>4</b>	<b>Versuchsauswertung</b>	<b>5</b>
4.1	Quellenspektrum und Zeiteichung . . . . .	5
4.2	Bestimmung der Lebensdauern . . . . .	7
4.3	Bestimmung der Lichtgeschwindigkeit . . . . .	9

## 1 Ziel des Versuchs

Bei diesem Versuch geht es darum die Lebensdauer von Positronium in Plexiglas zu messen. Zur Anregung wird eine  $^{22}\text{Na}$ -Quelle verwendet. Nebenbei wird die Lichtgeschwindigkeit bestimmt.

## 2 Theoretische Grundlagen

### 2.1 Paarvernichtung

Treffen Elektron und Positron aufeinander zerstrahlen sie in ein oder mehrere  $\gamma$ -Quanten. Dabei ist der Zerfall in ein  $\gamma$ -Quant aufgrund von Energie- und Impulserhaltung nur im Festkörper möglich. Beim Zerfall in zwei  $\gamma$ -Quanten werden im Ruhesystem zwei sich in entgegengesetzte Richtungen bewegend Photonen erzeugt, die jeweils die Ruheenergie eines Elektrons von  $511\text{keV}$  haben. Beim Zerfall in drei  $\gamma$ -Quanten werden Impuls und Energie beliebig auf die Photonen verteilt. Der Zerfall in ein  $\gamma$ -Quant kann im Folgenden aufgrund des sehr kleinen Wirkungsquerschnittes vernachlässigt werden.

Berücksichtigt man zusätzlich den Spin von Elektron und Positron, so muss man zwischen dem Singlett- ( $S = 0$ ) und Triplett-Zustand ( $S = 1$ ) unterscheiden. Der Bahndrehimpuls kann hierbei vernachlässigt werden, da die Geschwindigkeit der Teilchen im Festkörper hinreichend klein ist. Somit wird der Gesamtdrehimpuls allein durch den Spin bestimmt. Da Photonen Spin 1 besitzen, können zwei in entgegengesetzte Richtungen emittierte Photonen zu Gesamtspin 0 oder 2 koppeln. Dies bedeutet, dass der Singlett-Zustand nur in zwei Photonen zerstrahlen kann und der Triplett-Zustand in drei. Zerstrahlungen in vier, fünf oder noch mehr Quanten sind so stark unterdrückt, dass wir diese hier vernachlässigen können.

Die Wirkungsquerschnitte berechnen sich zu:

$$\sigma_{2\gamma} = \alpha \frac{\pi \hbar}{v} \quad \sigma_{3\gamma} = \frac{3}{8} \alpha^2 \frac{\pi \hbar}{v}$$

Der Zerfall in 3  $\gamma$ -Quanten ist wie erwartet um einen Faktor  $\alpha$  kleiner. Damit ergibt sich für das Verhältnis der beiden Wirkungsquerschnitte:

$$\frac{\sigma_{3\gamma}}{\sigma_{2\gamma}} = \frac{1}{372}$$

### 2.2 Bildung von Positronium

Anstatt zu zerstrahlen können Elektron und Positron einen wasserstoffähnlichen Bindungszustand eingehen, welchen man als Positronium bezeichnet. Analog zum Wasserstoffatom können die Energien der gebundenen Zustände berechnet werden. Da die reduzierte Masse jedoch nur  $\mu = \frac{m_e}{2}$  beträgt, sind die Bindungsenergien nur halb so groß ( $E_0 = -6.8\text{eV}$ ), während der (bohr'sche) Radius doppelt so groß ist.

Auch hier gibt es in Abhängigkeit der Spin-Stellungen zwei Grundzustände. Der Singlett-Zustand heißt Parapositronium und der Triplett-Zustand heißt Orthopositronium. Wie bei der Paarvernichtung kann auch hier der Triplett-Zustand nur in drei oder mehr  $\gamma$ -Quanten zerstrahlen. Aufgrund des geringeren Wirkungsquerschnittes ergibt sich somit bei genauer Rechnung, dass die Lebensdauer von Orthopositronium mit  $140\text{ns}$  deutlich größer als die von Parapositronium mit  $0,125\text{ns}$  ist.

Bewegt sich ein Positron in einem Festkörper, so kann sich aufgrund seiner Geschwindigkeit zunächst kein Positronium bilden. Aufgrund seines kleinen Wirkungsquerschnittes zerstrahlt es

auch nicht sofort. Innerhalb von ca.  $10^{-12}s$  wird das Positron durch inelastische Stöße mit Elektronen jedoch so stark abgebremst, dass seine Energie im eV-Bereich liegt. Hierbei muss das Positron jedoch noch mindestens so viel Energie besitzen, dass es ein Atom mit Ionisierungsenergie  $V$  ionisieren und die entsprechende Bindungsenergie für Positronium ( $-6.8eV$ ) aufbringen kann. Der Energiebereich, in dem die Bildung von Positronium möglich ist, heißt Ore-Gap  $\Delta E$ . Er ergibt sich aus der Differenz der maximalen Energie, welche durch die niedrigste Anregungsenergie  $E_a$  des Atoms gegeben ist, und der minimalen Energie.

$$\Delta E = E_{max} - E_{min} = E_a - (V - 6.8eV)$$

### 2.3 Positronium im Festkörper

Da Orthopositronium drei Spinzustände einnehmen kann, wird es auch drei mal häufiger gebildet und kann dementsprechend oft zerstrahlen. Für das Verhältnis der der Wirkungsquerschnitte ergibt sich:

$$\frac{\sigma_{3\gamma}}{\sigma_{2\gamma}} = 3$$

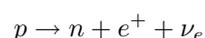
Da Orthopositronium jedoch eine größere Lebensdauer besitzt, wechselwirkt es im Festkörper, wodurch sich das Verhältnis von kurz- zu langlebigen Komponenten verändert. Man misst im Festkörper eine langlebige Komponente mit ca.  $2 - 4ns$  und zwei kurzlebige Komponenten mit ca.  $0.5ns$  und ca.  $0.12ns$ . Die kürzeste Komponente wird durch den Zerfall von Parapositronium geildet. Die langlebige Komponente wird dem Zerfall von Orthopositronium zugeschrieben, während die mittlere Komponente durch freien Zerfall verursacht wird.

Die wesentlich kürzere Lebensdauer von Orthopositronium erklärt sich durch zwei Prozesse. Zum Einen verkürzen sog. Pick-Off-Prozesse die Lebensdauer. Dabei wechselwirkt das Orthopositronium mit dem Festkörper, welcher die Impulsdifferenz aufnimmt und so den viel wahrscheinlicheren Zerfall in zwei  $\gamma$ -Quanten ermöglicht. Des weiteren treten Konversionsprozesse auf. Dabei tauscht das Positronium sein Elektron mit einem aus dem Festkörper aus, wodurch es zur Umwandlung von Para- in Orthopositronium und umgekehrt kommen kann. Die Wahrscheinlichkeit für eine derartige Umwandlung ist hierbei größer, als der Zerfall des Orthopositroniums und kleiner als der des Parapositroniums. Somit kommt es hauptsächlich zu einer Umwandlung von Ortho- in Parapositronium, welches anschließend zerfällt. Die effektive Lebensdauer  $\tau_{Ortho}$  wird daher wie folgt verkürzt:

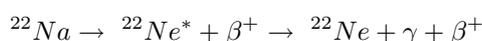
$$\frac{1}{\tau_{Ortho}} = \frac{1}{\tau_0} + \frac{1}{\tau_{Pick-off}} + \frac{1}{\tau_{Konversion}}$$

### 2.4 $^{22}Na$ -Quelle

Zur Erzeugung eines Positrons bietet sich eine  $\beta^+$ -Strahler an. Der entsprechende Zerfall tritt auf wenn der Kern zu viele Protonen besitzt und ein solches in ein Neutron umgewandelt wird.



Im Experiment wird hierbei  $^{22}Na$  als  $\beta^+$ -Strahler verwendet. Der erzeugte angeregte  $^{22}Ne$ -Kern strahlt im Rahmen der Messgenauigkeit quasi instantan ein  $\gamma$ -Quant von  $1.275MeV$  ab. Dieses dient als Start-Signal für die Zeitmessung.



## 3 Versuchsdurchführung

### 3.1 Aufbau

Die Quelle ist durch einen Halter beweglich auf einer Schiene montiert. Auf der Schiene befinden sich auch die beiden Detektoren, die ebenfalls verschiebbar sind. Die Quelle befindet sich zwischen den Detektoren, welche somit unter einem Winkel von  $180^\circ$  zueinander messen. Durch Verschieben des einen Detektors lassen sich Messungen bei verschiedenen Abständen durchführen. Seitlich der Schiene wird die Quelle durch einen Bleiblock abgeschirmt.

Die Detektoren sind mit einer Elektronik verbunden, welche die Impulse zur Analyse an einen PC weiterleitet. Mit dem Messprogramm lassen sich dann Zeit- oder Energie-Spektren aufnehmen und speichern.

### 3.2 Quellspektrum und Zeiteichung

Zuerst nehmen wir das Energie-Spektrum der  $^{22}\text{Na}$ -Quelle auf. Wir schieben dazu die Quelle und Detektoren in direkten Kontakt. Mit dem Messprogramm nehmen wir dann innerhalb von 20 Minuten das Energie-Spektrum auf.

Anschließend variieren wir den Schwellenwert so, dass die untere Grenze des Spektrums gerade dem Anstieg des Peaks entspricht. Wir wählten einen Schwellenwert von  $1.42\text{mV}$ .

Danach führen wir die Zeiteichung durch. Dazu schalten wir an der Elektronik auf Zeitmessung um. Zusätzlich aktivieren wir ein Verzögerungselement. Dieses bewirkt, dass der Stopp-Impuls um eine einstellbare Zeit in Nanosekunden verzögert wird. Wir starten eine Messung und erhöhen alle 30 Sekunden die Verzögerung um  $4\text{ns}$ . Das aufgenommene Spektrum wird dadurch in Peaks unterteilt, deren zeitlicher Abstand genau der eingestellten Verzögerung entspricht. Im Rahmen der Auswertung können wir mit Hilfe dieser Eichung jedem Messkanal eine Messzeit zuordnen.

### 3.3 Messung

Nach den Eichungen führen wir die eigentlichen Messungen durch. Dazu nehmen wir bei 4 Abständen (0, 15, 30 und  $60\text{cm}$ ) das Zeit-Spektrum auf. Die Messdauer beträgt jeweils 20 Minuten. Die Quelle bleibt in Kontakt mit dem linken Detektor, während der rechte auf den entsprechenden Abstand verschoben wird.

## 4 Versuchsauswertung

Im Rahmen der Versuchsauswertung wurden, soweit nichts anderes erwähnt, ROOT<sup>1</sup> und MATHEMATICA<sup>2</sup> zur Fehlerrechnung und grafischen Darstellung der Messergebnisse verwendet. Darüber hinaus wurden die gängigen Formeln für Stichprobenmittelwert, Stichprobenvarianz und Gauß'scher Fehlerfortpflanzung verwendet. Bei korrelierten Fehlern wird ggf. die Größtfehlerabschätzung anstelle der Gauß'schen Fehlerfortpflanzung verwendet, sofern nicht alle Elemente der Kovarianzmatrix bekannt sind. Darauf wird jedoch im Text explizit hingewiesen.

Von einer Wiedergabe der Messwerte im Protokoll sehen wir aus Gründen der Übersichtlichkeit ab. Sie finden sich auf dem Praktikumsrechner

### 4.1 Quellenspektrum und Zeiteichung

Für die Messung des Quellen-Spektrums erhalten wir das in Abbildung 1 gezeigte Ergebnis.

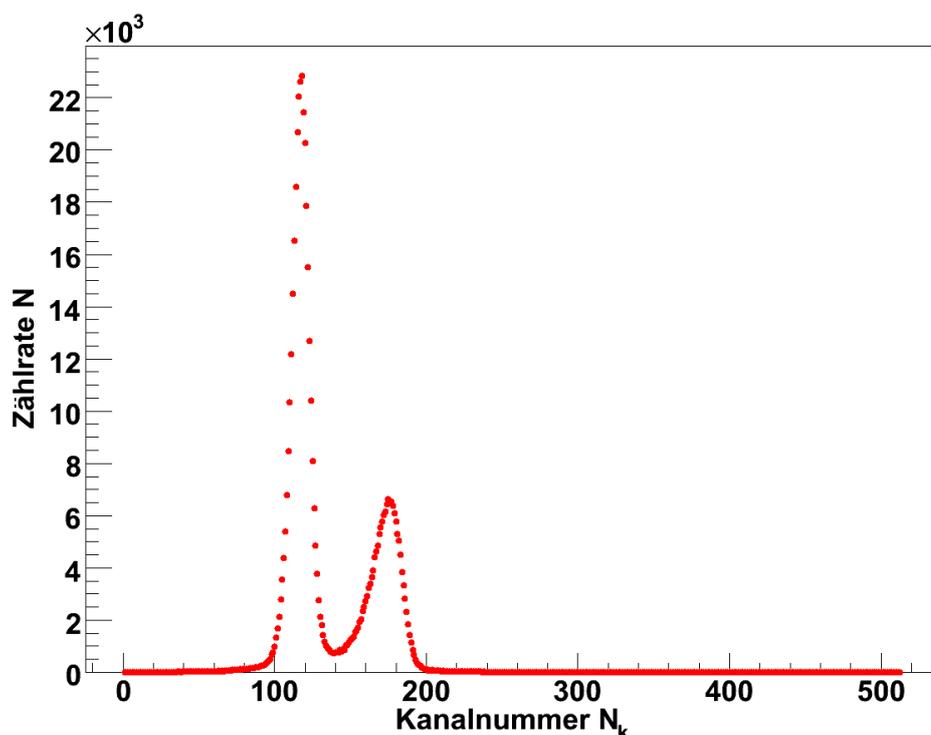


Abbildung 1: Energie-Spektrum der <sup>22</sup>Na-Quelle

Den Erwartungen entsprechend lassen sich zwei Peaks identifizieren. Der erste und größere entspricht einer Energie von  $511\text{keV}$  und entsteht durch die Vernichtungsstrahlung. Der zweite wird durch die Relaxation des beim Zerfall entstehenden angeregten Neon-Kerns verursacht und entspricht einer Energie von  $1275\text{keV}$ . Das Photon dieser Reaktion wird als Start-Signal bei der späteren Zeitmessung verwendet.

<sup>1</sup><http://root.cern.ch>

<sup>2</sup><http://www.wolfram.com>

Abbildung 2 zeigt das Ergebnis der Messung zur Zeit-Eichung. Zur Bestimmung der Kanal-Nummern, bei welchen die Peaks auftreten, führten wir für jeden Peak einen Fit mit einer Gauß-Funktion durch. Die Ergebnisse sind in Tabelle 1 zusammengefasst. Wir nahmen einen Fehler von  $\frac{1}{\sqrt{N}}$  für die Messpunkte an. Da uns die zeitliche Verzögerung zwischen den Peaks bekannt ist, können wir diese gegen die ermittelten Kanal-Nummern auftragen und erhalten den in Abbildung 3 gezeigten Zusammenhang. Aus der linearen Regression erhalten wir eine Gleichung, die es uns ermöglicht die Daten der anschließenden Messung in Zeiten umzurechnen:

$$t(N_K) = (0.079 \pm 0.000)ns \cdot N_K - (9,294 \pm 0.000)ns$$

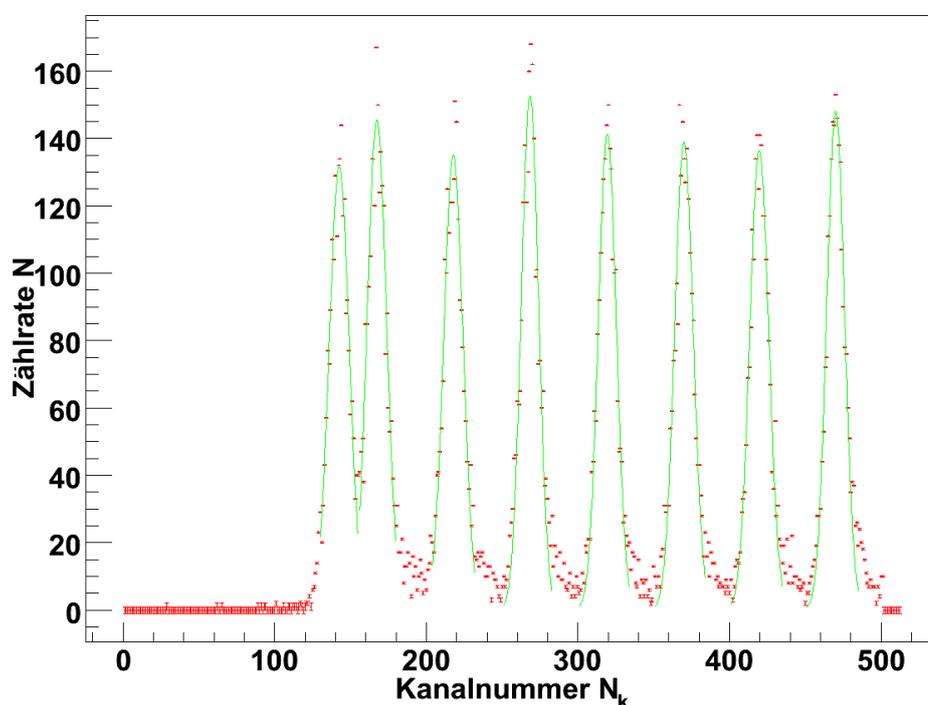


Abbildung 2: Messung zur Zeiteichung

Peak-Nr.	Verzögerung	Kanal-Nr.
1	$2ns$	$142.574 \pm 0.002$
2	$4ns$	$67.371 \pm 0.002$
3	$8ns$	$217.751 \pm 0.002$
4	$12ns$	$268.357 \pm 0.002$
5	$16ns$	$319.326 \pm 0.002$
6	$20ns$	$369.833 \pm 0.002$
7	$24ns$	$419.577 \pm 0.002$
8	$28ns$	$469.896 \pm 0.002$

Tabelle 1: Zu den Peaks gehörende Kanal-Nummern aus Gauß-Fits

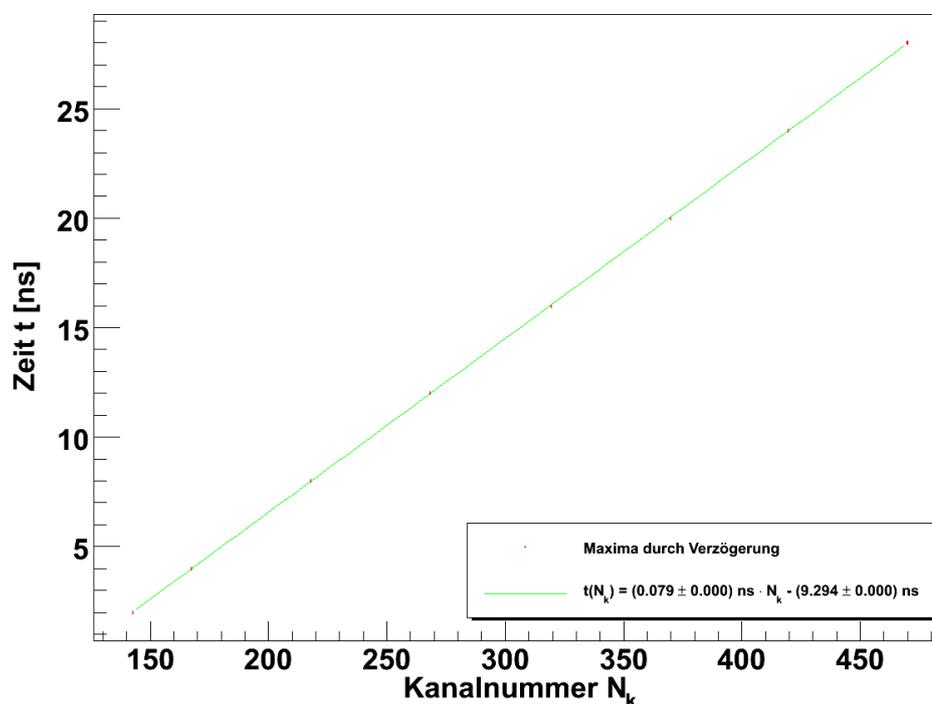


Abbildung 3: Resultierende Zeit-Eichgerade

## 4.2 Bestimmung der Lebensdauern

Die Eichgerade hat eine Nullstelle bei  $N_K = 117,168$ . Da negative Zeiten für einen Zerfall unsinnig sind, verwerfen wir im Folgenden alle Messdaten in den Kanälen 1 bis 117. Ebenso lassen wir alle Kanäle mit 0 Ereignissen ausser Acht, da der Fehler dieser Werte mit  $\infty$  veranschlagt werden müsste. Uns bleiben damit 167 Kanäle, die in die Auswertung mit eingehen. Mit Hilfe der Eichgeraden rechnen wir die Kanal-Nummern in Mess-Zeiten um. Wir erhalten das in Abbildung 4 gezeigte Spektrum. Wiederum setzen wir den Fehler in N-Richtung mit  $\frac{1}{\sqrt{N}}$  fest. Der Fehler in t-Richtung ergibt sich über Größtfehlerabschätzung (wegen Korrelation) aus den Fehlern der Eichgeraden.

Wie in der Vorbereitung erläutert wurde, entsteht dieses Spektrum aus einer Überlagerung von drei Zerfällen mit unterschiedlichen Lebensdauern. Die kürzeste dieser Lebensdauern kann jedoch nicht aufgelöst werden und verschmilzt mit der mittleren, weswegen die Kurve nur durch die beiden längeren bestimmt ist. Sie folgt der Gleichung:

$$N(t) = Ae^{\frac{t}{\tau_1}} + Be^{\frac{t}{\tau_2}} + C$$

Dabei bezeichnet der Parameter  $C$  einen Untergrund der durch zufällige Koinzidenzen entsteht. Bei der Inspektion unserer Messdaten stellten wir fest, dass gegen Ende des Spektrums nur noch Kanäle mit maximal einem Ereignis auftraten. Deutlich häufiger als ein Ereignis wurde in diesem Bereich jedoch kein Ereignis registriert. Der Untergrund liegt also zwischen 0 und 1. Da die leeren Kanäle jedoch stark überwiegen vernachlässigen wir den Untergrund in unserer Messung und setzen  $C = 0$ .

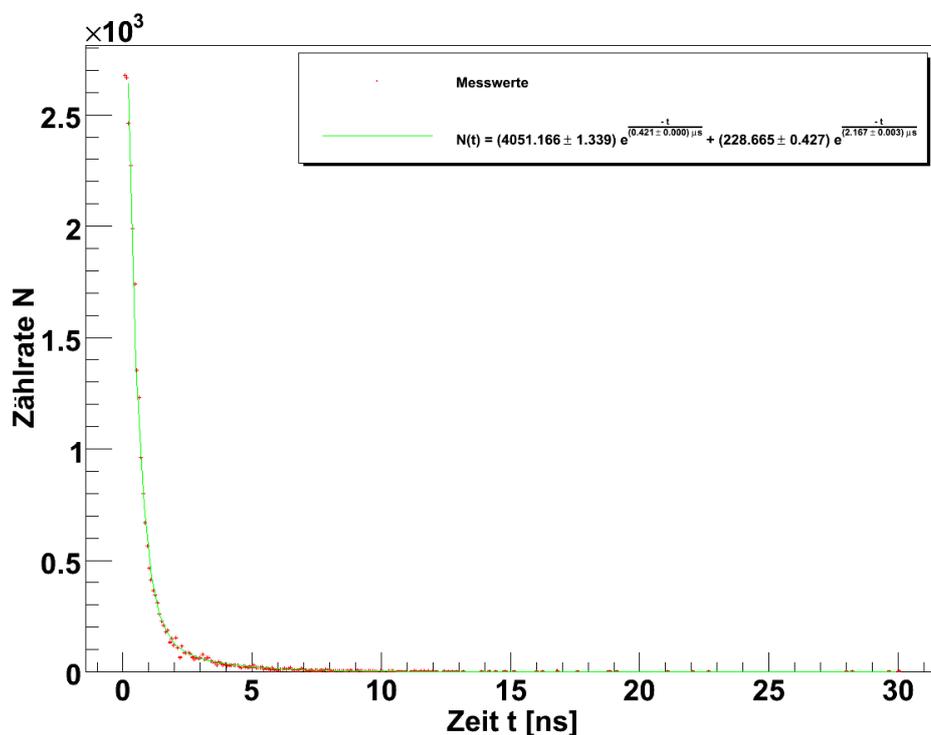


Abbildung 4: Messung der Lebensdauer

Die übrigen 4 Parameter können wir durch einen Fit bestimmen. Zusätzlich zu den statistischen Fehlern nehmen wir einen systematischen Fehler an. Dieser resultiert aus der endlichen Zeit-Auflösung des Detektors. Zeiten die kürzer als der halbe Abstand zwischen zwei Kanälen sind, können schlichtweg nicht aufgelöst werden. Der systematische Fehler  $\delta t_{sys} = 0.040 ns$  entspricht dann der halben Steigung der Eichgeraden. Wir erhalten somit insgesamt:

$$\tau_1 = 0.422 ns \pm 0.000 ns \pm 0.040 ns$$

$$A = 4051.166 \pm 1.339$$

$$\tau_2 = 2.167 ns \pm 0.003 ns \pm 0.040 ns$$

$$B = 228.665 \pm 0.427$$

Die ermittelten Lebensdauern stimmen sehr gut mit den im Vorbereitungsteil genannten Werten für den freien Zerfall (kurzlebige Komponente) und den Zerfall von Orthopositronium (langlebige Komponente) überein.

Wie eingangs erwähnt sollte das langlebige Orthopositronium 3 Mal häufiger gebildet werden, als das kürzer lebende Parapositronium. Die maximalen Zählraten der Parameter  $A$  und  $B$  zeigen jedoch ein deutlich anderes und noch dazu umgekehrtes Verhältnis. Wir hätten  $B = 3A$  erwartet. Wir vermuten, dass dieser Unterschied durch die freien Zerfälle verursacht wird, die deutlich häufiger auftreten und durch die Detektorauflösung mit dem Zerfall des Parapositroniums in der kurzlebigen Komponente zusammengefasst sind.

### 4.3 Bestimmung der Lichtgeschwindigkeit

Aus den Messungen mit größerem Detektorabstand lässt sich die Lichtgeschwindigkeit bestimmen. Das Stopp-Photon muss zuerst die Strecke von der Quelle bis zum Detektor zurücklegen, wodurch sich die gemessene Lebensdauer verlängert. Da die Strecke bekannt ist, kann aus der für den Flug benötigten Zeit die Lichtgeschwindigkeit ausgerechnet werden.

Unsere Messungen ergaben den in Abbildung 5 gezeigten Verlauf. Der Übersichtlichkeit halber haben wir alle drei Messungen mit der relativen Zählrate in einem Diagramm dargestellt. Diesmal verwarfen wir lediglich die Kanäle, die kein Ereignis registriert hatten. Die Kanäle die Zeiten  $< 0$  entsprechen nahmen wir jedoch mit auf, um volle Peaks zu erhalten. Da die Zählrate mit dem Abstand abnimmt, steigt natürlich der Fehler auf die Messungen mit größerem Abstand, was an den Fehlerbalken gut zu erkennen ist.

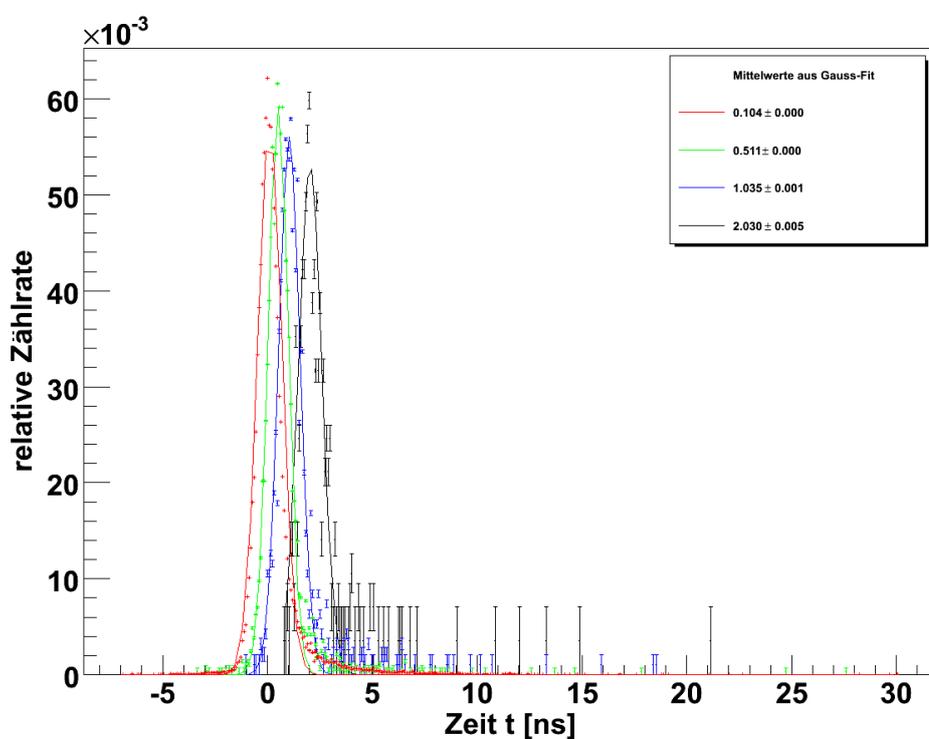


Abbildung 5: Zeit-Spektrum bei verschiedenen Detektor-Abständen

Wieder bestimmten wir durch den Fit mit einer Gauß-Funktion den Mittelpunkt der Peaks und damit die Zeiten, um welche die Lebensdauer verlängert wurde. Den Detektorabstand können wir dann gegen die so erhaltenen Zeiten auftragen und erhalten den in Abbildung 6 gezeigten Verlauf. Aus diesem lässt sich leicht die Lichtgeschwindigkeit ermitteln. Sie entspricht der Steigung der Ausgleichsgeraden.

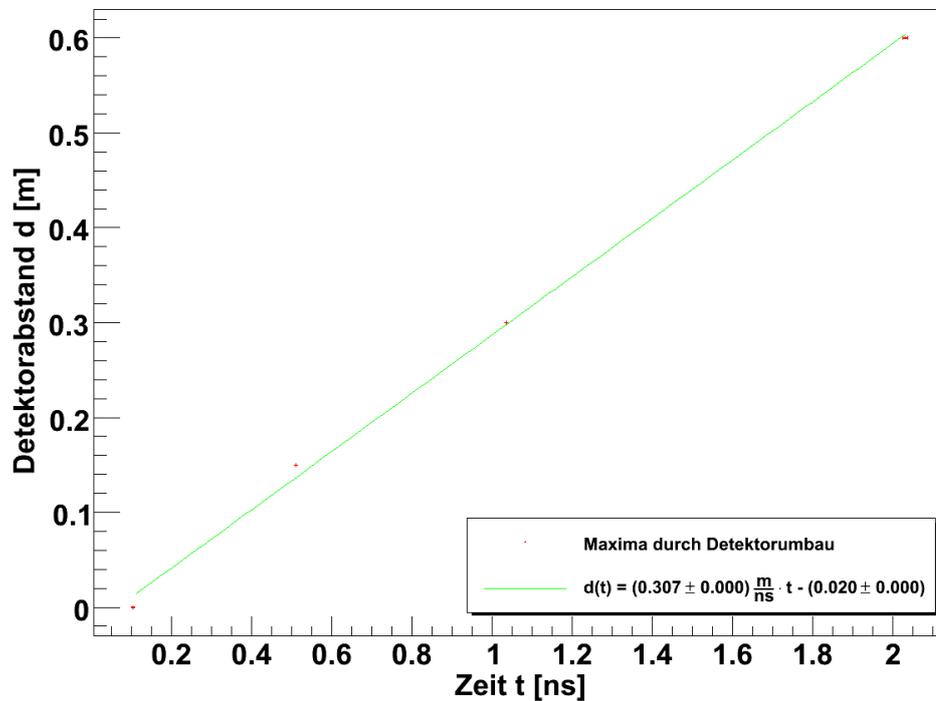


Abbildung 6: Detektorabstand gegen die Zeit-Verzögerung

Mit Hilfe der Ausgleichsgeraden konnten wir folgenden Wert für die Lichtgeschwindigkeit ermitteln:

$$c = 3.074 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}} \pm 0.000 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Dieser Wert stimmt im Rahmen des Versuchsaufbaus gut mit dem Literaturwert überein. Da die statistischen Fehler sehr klein sind, vermuten wir, dass die leichte Überhöhung durch systematische Fehler verursacht wird. Diese lassen sich jedoch aufgrund des Versuchsaufbaus nur schwer abschätzen.