

Auswertung P1-22 – Schwingungen & Resonanz

Michael Prim & Tobias Volkenandt

14. November 2005

Aufgabe 1 – Drehpendel/Pohlsches Rad und freie Schwingungen

Mit dem Messwerterfassungssystem CASSY nahmen wir die Auslenkung des Drehpendels bei nicht eingeschalteter Wirbelstrombremse auf. Selbige konnten wir mit dem einfachen Zusammenhang $\varphi = \frac{\text{Auslenkung}}{\text{Kreisradius}} = \frac{s}{r}$ in den entsprechenden Auslenkungswinkel umrechnen.

Da in der Natur jedoch keine gänzlich freien Schwingungen auftreten, war auch hier mit der Zeit eine Dämpfung zu beobachten. Sie resultiert zum einen aus der Luftreibung und zum anderen aus der mechanischen Reibung, welche in der Aufhängung entsteht.

In Anlehnung an den aus der Mathematik bekannten Dämpfungsterm eines harmonischen Oszillators erwarteten wir auch hier eine Dämpfung in der Form $e^{-\beta t}$. Mit der *fit-by-eye* Methode konnten wir eine einhüllende Funktion $f(t) = e^{-0,04t}$ bestimmen.

CASSY konnte uns weiterhin aus den Messwerten des Winkels φ , dessen zeitliche Änderung und somit die Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}$ bzw. ω berechnen. Der zeitliche Verlauf des Winkels (Abb.1) und der Winkelgeschwindigkeit (Abb.2) sind auf Seite 2 dargestellt.

Weiterhin konnte den Messwerten entnommen werden, dass die Periodendauer der Schwingung $T_0 = 1,8s$ betrug. Daraus folgt, dass $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = 3,49 \text{ 1/s}$ beträgt.

Um die kinetische Energie des Systems zu bestimmen, mussten wir zunächst das Trägheitsmoment des Drehpendels abschätzen, wobei wir die Speichen des Rades vernachlässigten und nur den äußeren Kupferring betrachteten. Dessen Abmessungen konnten dem Aufgabenblatt entnommen werden.

$$J_{Rad} = \int r^2 \rho_{cu} dV = \rho_{cu} \int_{0,075}^{0,095} r^3 dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{0,002} dz = 0,0014 \text{ kgm}^2$$

Anschließend konnten wir mit der bekannten Formel der kinetischen Energie und den durch CASSY berechneten Werten der Winkelgeschwindigkeit die kinetische Energie im Verlauf der Zeit (Abb. 3) darstellen.

$$E_{kin} = \frac{1}{2} J_{rad} \omega^2$$

Zuletzt erstellten wir eine Phasenraumdarstellung des Schwingvorgangs (Abb. 4) indem wir die Winkelgeschwindigkeit über dem zugehörigen Winkel auftrugen. Der Radius der entstehenden Ellipse nimmt durch die vorhandene Reibung mit der Zeit ab.

Aufgabe 2 – Drehpendel/Pohlsches Rad und freie gedämpfte Schwingungen

Wir nahmen nun mit CASSY für unterschiedlich starke Ströme I_B durch die Wirbelstrombremse den Winkel auf. Wie in Aufgabe 1 führten wir anschließend mit der *fit-by-eye* Methode eine Untersuchung der Dämpfungskonstante β durch. Die so ermittelten Werte, mussten nun noch um die ohnehin vorhandene und in Aufgabe 1 bestimmte Dämpfung $\beta = 0,04$ korrigiert werden.

Strom I_B [mA]	β	β_{korr}
100	0,05	0,01
200	0,1	0,06
400	0,25	0,21
700	0,8	0,76

Alternativ lässt sich die Dämpfungskonstante auch aus dem Dämpfungsverhältnis k berechnen. Wir verwenden hierzu die folgende Formel, welche den Mittelwert über das Verhältnis zweier aufeinander folgender Maxima Φ der Schwingung bildet.

$$k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\Phi_{i-1}}{\Phi_i} \text{ außerdem gilt } k = e^{\beta T_0} \rightarrow \beta_{rech} = \frac{\ln(k)}{T_0}$$

Strom I_B [mA]	T [s]	k	n	β_{rech}
100	1,8	1,083	10	0,046
200	1,8	1,187	10	0,095
400	1,8	1,700	9	0,295
700	1,8	4,257	3	0,805

Aus der Tabelle wird klar ersichtlich, dass keine Abhängigkeit zwischen T und I_B besteht. Dies folgt auch aus der Formel für die Schwingungsdauer:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{D^*}}$$

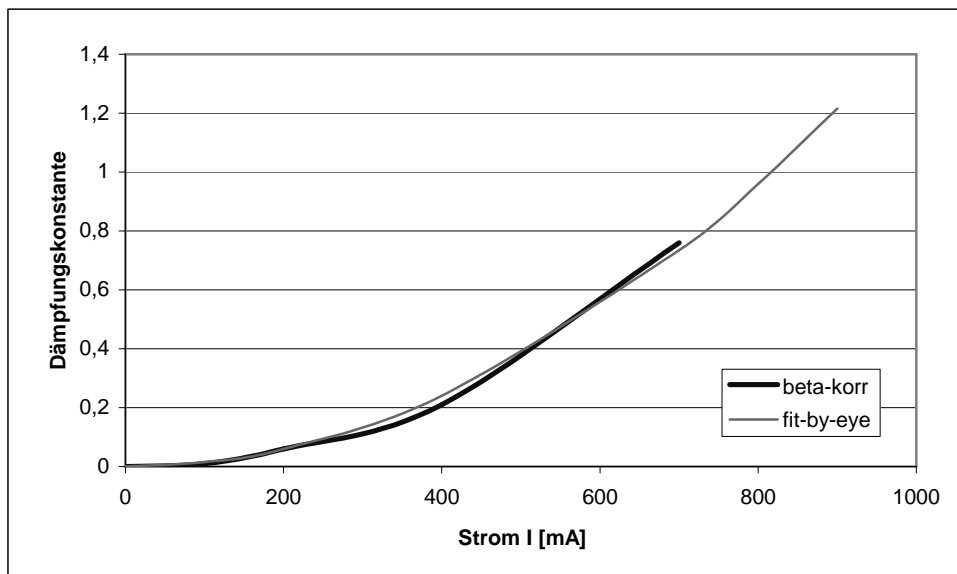
Die Abbildungen 5-8 stellen den zeitlichen Verlauf des Winkels für die einzelnen Stromstärken dar. Weiterhin wird die einhüllende Kurve mit der per *fit-by-eye* ermittelten Dämpfungskonstante dargestellt.

Die Leistung der Spule wird dazu verwendet, das Drehpendel zu dämpfen, folglich ist die Dämpfungskonstante $\beta \sim P$. Weiterhin ist bekannt, dass $P = U \cdot I = R \cdot I^2$.

Daraus ergibt sich, dass die Dämpfungskonstante $\beta \sim I_B^2$, dem durch die Spule fließenden Strom.

Stellen wir β_{korr} grafisch über dem Strom dar (Abb.9), erhalten wir mit der fit-by-eye Methode eine quadratische Gleichung $\beta_{korr} = 1,5 \cdot 10^{-6} I_B^2 / A^2$, welche den Verlauf beschreibt.

Abb.9: Dämpfungskonstante über dem Strom



Weiterhin können wir aus dieser Gleichung den Wert für die Grenzdämpfung $\beta_{korr} = \omega_0$ bestimmen.

$$I_{B-Grenzd.} = \sqrt{\frac{\omega_0}{1,5 \cdot 10^{-6}}} = 1525 A$$

Dieser Wert konnte von uns bei der experimentellen Bestimmung der Grenzdämpfung bestätigt werden.

Zuletzt können wir noch die Güte Q des Systems bestimmen. Die Formel für Q ist jedoch nur im Resonanzbereich gültig.

$$Q = \frac{\omega_0}{2\beta_{I_B}}$$

Strom I_B [mA]	Q aus β	Q aus β_{rech}
100	34,907	39,214
200	17,453	18,353
400	6,981	5,923
700	2,182	2,169

Es zeigt sich eine gute Übereinstimmung zwischen der aus der *fit-by-eye* Methode bestimmten Güte und der rechnerisch über den Mittelwert bestimmten.

Aufgabe 3 – Statische Messung der Winkelrichtgröße D^*

Über eine Umlenkrolle haben wir eine Masse von 10,6g am Drehpendel befestigt und die Auslenkung $s = 0,0537m$ mittels CASSY gemessen.

$$F \cdot r = D^* \cdot \varphi \rightarrow D^* = \frac{F \cdot r}{\varphi} = 0,0175Nm \quad \text{weiterhin gilt} \quad J_{rad} = \frac{D^*}{\omega_0^2} = 0,0014kgm^2$$

Vergleicht man das Trägheitsmoment mit der einfachen Abschätzung aus Aufgabe 1, so stellt man fest, dass diese doch sehr gut ist, obwohl die Speichen ausgelassen wurden.

Aufgabe 4 – Drehpendel/Pohlsches Rad und erzwungene Schwingungen

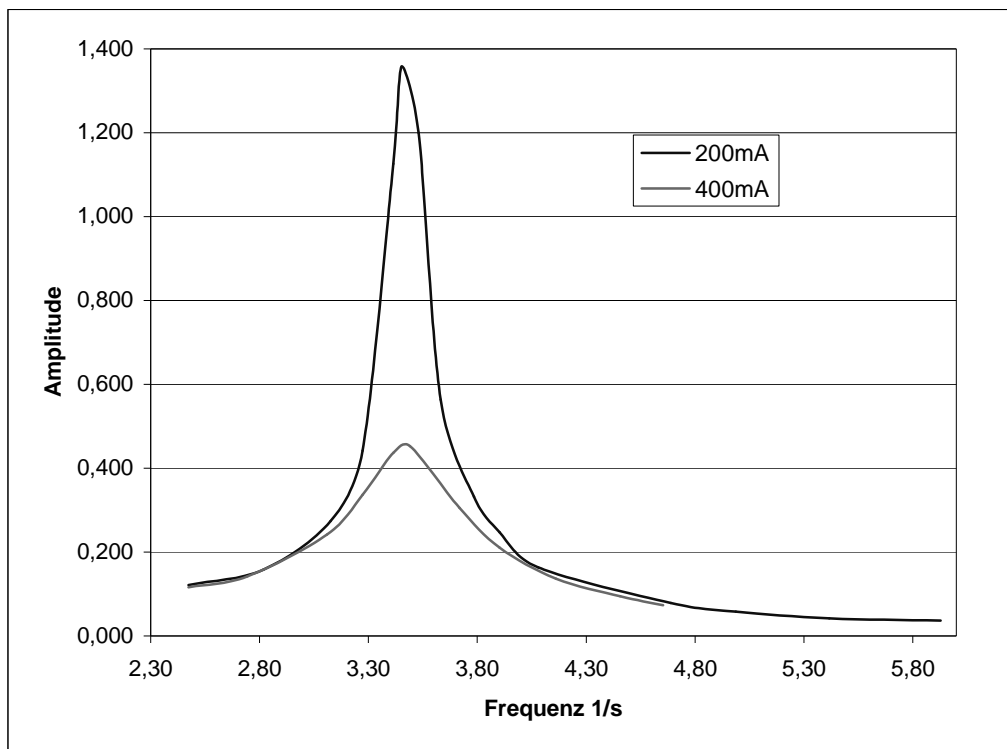
Wir regten das Drehpendel durch einen Motor zu Schwingungen an und beobachteten dabei mittels CASSY die Auslenkung. Weiterhin beobachteten wir, die Phasenverschiebung zwischen Pendel und Erreger. Wir führten die Messungen für zwei unterschiedliche Ströme I_B durch die Wirbelstrombremse durch.

Dabei stellten wir fest, dass die Phasenverschiebung weit unterhalb der Resonanzfrequenz gegen 0 ging um im Bereich der Resonanzfrequenz $\frac{\pi}{2}$ zu erreichen. Ebenso rasch, wie sie angestiegen war, klang sie im Bereich oberhalb der Resonanzfrequenz wieder ab und ging gegen π .

$I_B = 200mA$		$I_B = 400mA$	
Ω_{Motor} [1/s]	Amplitude	Ω_{Motor} [1/s]	Amplitude
2,47	0,121	2,47	0,1160
2,82	0,158	2,74	0,1420
3,13	0,274	3,11	0,2420
3,27	0,442	3,27	0,3370
3,41	1,126	3,41	0,4370
3,45	1,358	3,49	0,4525
3,53	1,200	3,72	0,3055
3,63	0,563	3,90	0,2105
3,79	0,332	4,16	0,1370
3,90	0,247	4,46	0,0945
4,08	0,163	4,65	0,0735
4,69	0,079		
4,99	0,058		
5,42	0,042		
5,93	0,037		

In Abbildung 10 wurde der Verlauf der Amplituden über der Erregerfrequenz dargestellt. Deutlich ist die Resonanz bei $\omega_0 = 3,49 \frac{1}{s}$ zu sehen.

Abb.10: Amplitude über der Erregerfrequenz Ω_{Motor}



Die Güte Q lässt sich aus der Bandbreite $\Delta\omega$ beim $1/\sqrt{2}$ fachen der Maximalamplitude, im Folgenden $A_{\sqrt{2}}$ genannt, bestimmen. Dort gilt: $\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}$

Um die entsprechenden Punkt zu bestimmen, betrachteten wir unsere Messwerte und suchten die Frequenzen vor und nach dem Resonanzfall, deren Amplituden $A_{\sqrt{2}}$ am nächsten kamen. Zwischen diesen beiden Frequenzen näherten wir die Verlauf der Amplitude linear und bestimmten aus dieser Gerade die zugehörige Frequenz zu $A_{\sqrt{2}}$.

Aus der Differenz der vor und nach dem Resonanzfall zu $A_{\sqrt{2}}$ gehörenden Frequenzen konnten wir die Bandbreite ermitteln und daraus die Güte.

Strom I_B [mA]	$\Delta\omega$	Q
200	0,188	18,322
400	0,452	7,555

Vergleicht man die Güte mit jener aus Aufgabe 2, stellt man fest, dass die Werte zwar leicht abweichen, von der Größenordnung her jedoch übereinstimmen. Die Abweichung ist vor allem darauf zurückzuführen, dass der Motor nur eine sehr ungenaue Einstellmöglichkeit bot und wir somit nicht genügend Messwerte besitzen um eine bessere Bestimmung von $A_{\sqrt{2}}$ durchzuführen.

Weiterhin ist nicht sicher, ob unser Maximum auch wirklich im Resonanzfall gemessen wurde und ob selbiger nicht noch leicht verschoben ist. Auch hier war die Einstellmöglichkeit des Motors zu ungenau für exaktere Messungen in diesem Bereich.

Aufgabe 5 – Serienschwingkreis und erzwungene Schwingungen

Nach dem Aufbau des LCR -Serienschwingkreises konnten wir mittels CASSY die Spannungen messen, welche an Spule und Kondensator anlagen. Dabei variierten wir mittels CASSY die Frequenz der am Schwingkreis angelegten sinusförmigen Wechselspannung U_0 zwischen 0Hz und 3000Hz , deren Maximalwert bei 3V lag.

Wir führten diese Messungen für vier verschiedene Widerstände R (0Ω , $8,2\Omega$, 47Ω und 100Ω) durch. Die Kapazität C des Kondensators betrug $0,33\mu\text{F}$. Die Induktivität L der Spule betrug 44mH .

- Die Abbildungen 11-14 zeigen jeweils die Stromstärke I_0 und Impedanz Z über der Frequenz der Spannung.
- Die Abbildungen 15-18 zeigen die Effektivwerte der angelegten Spannung U_0 sowie die Effektivspannungen an Spule U_L und Kondensator.
- Die Abbildungen 19-22 zeigen die Phasenverschiebung zwischen U_0 und I_0 . Der seltsame Knick am Anfang des Diagramms ist auf CASSY zurückzuführen. Die Software bedarf zunächst einiger Messwerte ehe die Phasenverschiebung richtig bestimmt werden kann.

Die Güte Q des Schwingkreises lässt sich auf zwei Arten bestimmen. Im ersten Verfahren wird die Bandbreite Δf beim $1/\sqrt{2}$ fachen der Maximalstromstärke ermittelt, wobei wir dasselbe Verfahren wie in Aufgabe 4 zur Bestimmung der entsprechenden Frequenzen und deren Differenz, der Bandbreite, angewendet haben.

Sind die entsprechenden Punkte gefunden, gilt weiterhin $\Delta f = \frac{f_0}{Q_I}$ bzw. $Q_I = \frac{f_0}{\Delta f}$

Die Eigenfrequenz des Schwingkreises lässt sich aus $f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = 1320\text{Hz}$ bestimmen.

Im zweiten Fall werden zwei Gleichungen verwendet, welche im Resonanzfall gültig sind. $|U_L| = Q_U \cdot U_0$ bzw. $|U_C| = Q_U \cdot U_0$ da die Spannungen an Spule und Kondensator identisch sind.

Aus den beide Verfahren ergeben sich folgende Werte für die Güte

Widerstand R [Ω]	Δf	Q_I	Q_U
0	74,892	17,625	23,656
8,2	101,462	13,009	15,694
47	270,099	4,887	5,718
100	486,603	2,713	3,035

Die Werte stimmen von der Größenordnung soweit überein, wir führen die Abweichungen vor allem auf den nicht zu vermeidenden Fehler bei der Bestimmung der Bandbreite zurück.

